Form@re
Open Journal per la formazione in rete

articoli

Learning mathematics with tools: the mediation role of the teacher

Apprendere la matematica con gli strumenti: il ruolo di mediazione dell'insegnante

Maria Alessandra Mariotti[a], Andrea Maffia[b],

[a] *Università di Siena, mariotti21@unisi.it*
[b] *Università di Pavia, andrea.maffia@unipv.it*

Abstract

Recognizing the relevance of the construction of knowledge by the learners, a complex educational problem concerns the movement from individual activities towards sharing and institutionalizing mathematical knowledge. Teacher's role is crucial: how to manage the movement from a task to the evoked mathematics? We face this problem in the specific case of tasks involving digital tools; we focus our attention on the actions performed by teachers while orchestrating collective discussion, on the effects of such actions on the evolution of mathematical meaning discussed, and on the sharing of those meanings between the students. A single case study exemplifies the presented theoretical framework to show how, through the chosen lenses, we can evidence teacher's actions during the collective discussion.

Keywords: collective discussion; mathematics; semiotic mediation; teacher; tools.

Sintesi

In una prospettiva didattica che privilegia il momento costruttivo di un sapere da parte dell'allievo, un problema didattico molto complesso riguarda il passaggio dalle attività individuali alla condivisione e alla istituzionalizzazione di un sapere matematico. Il ruolo dell'insegnante è cruciale: come gestire il passaggio dalla esecuzione di un compito alla Matematica che tale attività evoca? Affrontiamo questo problema nel caso particolare di compiti che richiedono l'uso di strumenti tecnologici, focalizzando la nostra attenzione sulle azioni che l'insegnante compie nell'orchestrare la discussione collettiva e sull'effetto che queste possono avere sia sull'evoluzione dei significati matematici oggetto della discussione, sia sulla condivisione di tali significati tra gli studenti. Lo studio di un singolo caso esemplifica il quadro teorico e mostra come, attraverso le lenti di analisi scelte, si possa mettere in evidenza l'agito dell'insegnante nella discussione.

Parole chiave: discussione collettiva; insegnante; matematica; mediazione semiotica; strumenti.

1. Introduzione

Da tempo, il paradigma educativo che vede l'educazione come trasmissione di un sapere dall'insegnante all'allievo è stato messo in discussione da riflessioni facendone emergere i limiti e possibili conseguenze (Brousseau, 1997). Tuttavia, in molti casi, resta il paradigma più diffuso, a dispetto delle insistenti proposte alternative, che promuovono una maggiore centralità dell'allievo nel processo educativo (Pellerey, 1983). Il persistere di questo paradigma può essere interpretato in vari modi, ma c'è un aspetto che crediamo possa essere chiamato in causa, qualsiasi interpretazione si accetti, ed è connesso al ruolo insostituibile che l'insegnante svolge.

Da molti anni l'attenzione è stata messa sull'allievo e la ricerca educativa, in particolare nell'ambito della didattica della matematica, si è concentrata sullo studio di aspetti cognitivi e didattici relativi al processo di apprendimento. Lasciando all'insegnamento un ruolo di mezzo che promuova lo sviluppo del processo di apprendimento, l'insegnante assumeva un ruolo di orchestratore e di promotore della costruzione personale di un sapere da parte dell'allievo. Ma la costruzione personale del sapere solleva il problema chiave della corrispondenza tra le costruzioni personali degli allievi e il sapere culturalmente inteso, il corpus di conoscenze ereditato dalla storia.

La relazione tra allievo e sapere necessita dunque di un intervento specifico ed è questa la mediazione didattica di cui parla Damiano (2013), mettendo in evidenza i limiti di certi approcci didattici[1]. Di questa azione di mediazione si intende parlare qui, ritenendo che la descrizione del ruolo dell'insegnante, proprio per la sua crucialità e complessità, non possa essere limitata all'organizzazione dell'ambiente di apprendimento, ma debba prendere in considerazione tutto il processo di insegnamento-apprendimento, in particolare la fase delicata nella quale le costruzioni personali degli allievi devono essere messe in relazione con il sapere matematico che è obiettivo dell'intervento didattico.

Il problema è vasto e non può essere trattato nei limiti di questo contributo; ci concentreremo allora su un esempio, molto specifico, nel quale è possibile identificare un processo di mediazione didattica in relazione all'uso di specifici strumenti. Dopo aver delineato un quadro teorico per l'analisi delle azioni dell'insegnante, analizzeremo un caso di discussione matematica con lo scopo di illustrarne il funzionamento.

2. La Teoria della Mediazione Semiotica

Gli strumenti tecnologici hanno da sempre fatto parte delle attività dell'uomo. Il supporto offerto dagli strumenti nell'esecuzione di compiti è indiscusso. L'opinione più diffusa sembra vedere lo strumento come la realizzazione di un sapere a esso preesistente, e del quale si limita a essere un'applicazione con lo scopo di raggiungere un obiettivo. Meno chiara è la funzione, per altro rintracciabile e documentabile nella storia, che gli strumenti hanno nella costruzione di conoscenze e in particolare di "teorie". In realtà, la dialettica tra pratica e teoria è stata spesso centrata sulla realizzazione e sull'uso di strumenti; un esempio famoso è quello della riga e del compasso su cui si fonda la teoria geometrica euclidea (Giusti, 1999).

---

[1] Nel caso di un approccio puramente costruttivista, per esempio, si parla di "precettore nascosto" (Damiano, 2013, p. 302).

Descriveremo il quadro teorico col fine di esplicitare ciò che si intende per apprendimento matematico nel caso di attività incentrate su uno strumento. Si tratta di un modello, elaborato da Author (2008), che prende in considerazione esplicitamente il ruolo dell'insegnante e si basa sull'uso didattico di uno specifico strumento, anzi di un 'artefatto'.

2.1. Potenziale semiotico di un artefatto

Abbiamo parlato di *artefatto*, e chiariamo subito il perché di questo termine; ha origine nella distinzione proposta da Rabardel (1995) tra artefatto e strumento, il primo si riferisce all'oggetto in sé, materiale o virtuale che sia, mentre il secondo si riferisce alla combinazione di tale oggetto con i possibili schemi mentali, costruiti e mobilitati per il suo uso, al fine di eseguire un compito. La costruzione di tali schemi è l'origine di un significato che sarà all'inizio strettamente legato all'esperienza che lo ha generato, ma che, sotto la guida dell'insegnante, potrà essere elaborato e trasformarsi in un significato matematico.

Facciamo un esempio riferendoci a un artefatto familiare: il compasso. È esperienza comune aver usato il compasso in relazione a vari compiti; primo fra tutti quello di disegnare cerchi. Le azioni compiute usando il compasso per disegnare offrono all'allievo l'occasione di costruire significati particolari, come quello che emerge dal ruolo privilegiato del punto nel quale il compasso viene 'puntato', quello relativo all'ampiezza della sua apertura, ma anche l'equidistanza dei punti della traiettoria tracciata dal centro, etc. Seppure tali significati siano situati e personali, per l'esperto richiamano significati matematici: il significato di centro di un cerchio, di raggio di un cerchio e quello di circonferenza come luogo dei punti equidistanti dal centro. In questo senso possiamo dire che un certo artefatto ha un duplice legame: da un lato con i significati personali che emergono dal suo uso, dall'altro con i significati matematici evocati. Questo duplice legame è ciò che chiamiamo *potenziale semiotico dell'artefatto.*

La nozione di potenziale semiotico è il cuore della Teoria della Mediazione Semiotica (TMS, Bartolini Bussi & Mariotti, 2008), in quanto è proprio la consapevolezza di tale potenziale che permette all'insegnante di pianificare le attività finalizzate a far evolvere i significati personali degli allievi nei significati matematici che sono obiettivo del suo intervento didattico. La scelta di un approccio semiotico ha come conseguenza porre al centro dell'attenzione, nel modello proposto e nell'analisi dei dati sperimentali, i processi semiotici in gioco, ed in particolare il discorso che emerge nell'azione e nell'interazione in classe.

Come già accennato, le attività che gli allievi sono chiamati a svolgere con l'artefatto sono solo una parte, seppure fondamentale, dell'intervento didattico. Il processo di insegnamento/apprendimento si basa sull'emergere dei significati personali all'interno dalle attività con l'artefatto, ma ha il suo sviluppo in attività individuali e collettive che hanno come obiettivo la generazione di significati personali, la loro condivisione e il loro sviluppo verso significati matematici; in questo modo, l'intero percorso didattico consiste nell'iterazione di cicli didattici (Figura 1), nei quali si sviluppa un discorso che si fa mano a mano più matematico.

I significati emergono e sono condivisi attraverso rappresentanti di diverso tipo – parole, gesti, disegni – e anche attraverso ibridi complessi; per questo useremo il termine *segno* riferendoci a sistemi semiotici in generale (e.g. Arzarello, 2006). L'uso del termine segno è ispirato a Peirce e intendiamo superare la distinzione tra significante e significato, assumendo un'indissolubile relazione tra loro, legata a chi produce il segno, ovvero 'personale'.

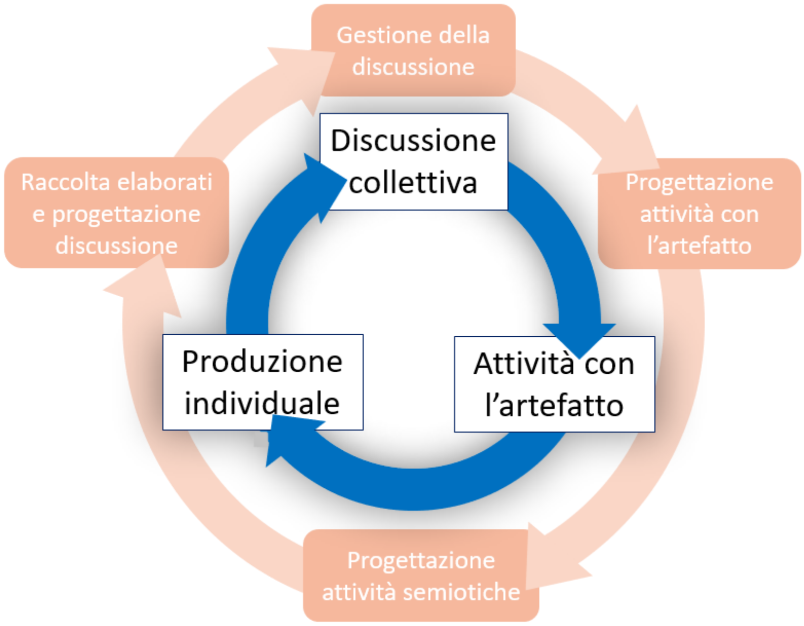

Figura 1. Ciclo didattico.

Nel ciclo didattico, un ruolo importante è svolto dalle attività di condivisione. Nelle attività collettive, il compito di mediazione dell'insegnante diventa cruciale al fine di rendere gli allievi consapevoli della matematica evocata da quanto fatto con l'artefatto e di guidare la costruzione di un linguaggio matematico condiviso. Il punto chiave è però rendersi conto che il passaggio dall'azione con l'artefatto alla conoscenza matematica non è spontaneo, ma richiede un'azione mirata.

È su questa parte del percorso didattico che in questo contributo intendiamo focalizzare l'attenzione, descrivendo alcune delle azioni che l'insegnante può mettere in atto allo scopo di favorire lo sviluppo condiviso del discorso matematico.

2.2. Il ruolo dell'insegnante nella discussione collettiva

In accordo con il modello elaborato (Figura 1) sono due i momenti fondamentali nei quali si richiede l'intervento dell'insegnante:

- progettazione e monitoraggio dell'attività con l'artefatto. Il ruolo dell'insegnante si espleta nel favorire l'emergere del potenziale semiotico: pianificare compiti e interventi mirati a favorire la produzione individuale di testi in relazione all'attività svolta con l'artefatto;
- progettazione e guida del processo di evoluzione del discorso. L'insegnante gioca una parte attiva nel processo di mediazione semiotica. Ha l'obiettivo di favorire la presa di coscienza del passaggio dall'uso dell'artefatto alla sua interpretazione matematica. Le discussioni collettive giocano un ruolo chiave nello sviluppo di un ciclo didattico e sono il cuore del processo di mediazione.

Gli studi condotti fino ad ora, e quelli in corso, hanno mirato a descrivere le modalità di intervento dell'insegnante nei due momenti fondamentali. In questo contributo presenteremo una modellizzazione del ruolo dell'insegnante in attività di discussione collettiva. Per una discussione più ampia si rimanda a Mariotti, 2009; Mariotti & Maracci, 2011.

Iniziamo chiarendo cosa si intende per attività di discussione; quali aspetti la caratterizzano in riferimento al processo di mediazione semiotica. Partiamo dalla definizione di *discussione matematica* di Bartolini Bussi e colleghe: “Mathematical discussion is a special kind of interaction that can take place in mathematics lessons. Mathematical discussion is conceived of as a polyphony of articulated voices on a mathematical object that is one of the motives for the teaching-learning activity […]. The term voice is used in the sense of Baktin, after Wertsch (1991), to mean a form of speaking and thinking that represents the perspective of a particular social category” (Bartolini Bussi et al., 1998, p. 68).

In una discussione matematica la classe è coinvolta nello sviluppo di un discorso che possiamo chiamare ‘matematico’, in quanto è obiettivo condiviso la costruzione collettiva di un sapere matematico; un sapere che agli allievi è ancora ‘ignoto’ mentre per l’insegnante è noto. Questa asimmetria tra allievi e insegnante rende il ruolo del docente cruciale: in quanto esperto, è suo il compito di guidare il processo di costruzione collettiva di significati condivisi, garantendo contemporaneamente l’accettabilità di tali significati rispetto alla comunità matematica.

Quando la discussione matematica ha come obiettivo l’evoluzione di significati personali in significati matematici, non ci si aspetta che sia né spontanea né semplice, e per questo richiede la guida specifica dell’insegnante.

Si deve sottolineare che si tratta di una discussione, non di una *lezione euristica* in cui “l’insegnante alterna brevi esposizioni a domande o frasi non completate” (Bonaiuti et al., 2007, p.60); nella discussione il docente “non trasmette conoscenze, ma supporta lo studente in attività cognitive quali pensare, ragionare, argomentare. La discussione consente dunque un maggiore coinvolgimento degli studenti, facilita i processi di scoperta, ridistribuisce il controllo sullo studente e sul gruppo” (ivi, p. 63). La discussione matematica ha dunque molti punti in comune con una situazione di *istituzionalizzazione* (Brousseau, 1997), con la quale è compatibile, e ne offre una interpretazione semiotica. L’obiettivo didattico “de reconnaître et de légitimer «l’objet de l’enseignement»" (Brousseau, 2011) diventa sostenere e favorire il passaggio da significati personali strettamente legati all’esperienza condivisa di uso di un artefatto per assolvere un compito, verso significati matematici culturalmente definiti, tenendo conto dei contributi individuali e sfruttando le potenzialità semiotiche dell’artefatto.

La discussione presenta però alcuni rischi: “soggetti più introversi possono essere sopraffatti, gli apporti potrebbero risultare dispersivi oppure inconcludenti” (Bonaiuti et al., 2007, p. 63). L’intervento dell’insegnante deve essere orientato a evitare che alcuni allievi restino esclusi e favorire la realizzazione delle condizioni utili per lo svolgimento della discussione stessa.

2.3. L’azione dell’insegnante nella Teoria delle Situazioni

Seguendo l’analisi proposta da Falcade (2006), col fine di mettere in luce le responsabilità dell’insegnante nel promuovere la condivisione dei significati che emergono durante la discussione collettiva, faremo riferimento alle categorie di azione definite come *action professorale* da Sensevy e colleghi (2005) all’interno del quadro teorico della Teoria delle Situazioni (Brousseau, 1997).

Sensevy e colleghi (2005) si riferiscono al costrutto di *milieu*, introdotto da Brousseau e definito, con le sue parole, in questo modo: “Le milieu peut être considéré ici comme le système de contraintes et de resources, aussi bien matérielles que symboliques, dans lequel évoluent l’élève et le professeur. Il n’est donc pas nécessairement milieu d’une situation adidactique” (Brousseau, 1997, p. 248).

Il milieu consiste in ciò che è dell’ambiente nel quale l’allievo agisce ed è filtrato dalla prospettiva dell’allievo stesso. Dunque, sarà parte del milieu sia il compito così come è compreso e accettato dall’allievo, sia ciò che di materiale o simbolico è disponibile rispetto al compito che si accinge a svolgere. Un artefatto può essere inteso come parte del milieu.

Secondo gli autori (Sansevy et al., 2005) è possibile categorizzare le azioni dell’insegnante in base ai loro effetti:

- azioni con conseguenze sul determinare chi abbia la responsabilità dell’apprendimento (*effetto topogenetico*);
- azioni con conseguenze sull’organizzazione del milieu – degli oggetti, ma anche dei compiti, etc. (*effetto mesogenetico*);
- azioni con conseguenza sul tempo dell’insegnamento/apprendimento (*effetto cronogenetico*).

Queste categorie possono essere usate per descrivere il ruolo dell’insegnante durante la discussione, in particolare in relazione alla dimensione semiotica.

3. L’azione dell’insegnante nel processo di mediazione semiotica

Presentiamo due classi di interventi che sono distinguibili rispetto a due obiettivi generali tra loro intrecciati; uno riguarda il processo di evoluzione dei significati, da personali a matematici, l’altro riguarda la condivisione di tale processo da parte di tutti gli allievi.

3.1. L’azione dell’insegnante per l’evoluzione dei significati

L’analisi di discussioni collettive, svolte all’interno di sperimentazioni, ha messo in evidenza azioni ricorrenti dell’insegnante, che hanno mostrato la loro efficacia didattica, caratterizzabili e riconducibili all’intenzione di promuovere l’evoluzione verso significati matematici. Di seguito le denominiamo e descriviamo.

Le azioni di *ritorno al compito* sono interventi che chiedono di rievocare l’esperienza vissuta dall’allievo nella soluzione del compito.

L’obiettivo è ricostruire nel suo contesto l’attività svolta con l’artefatto e rendere possibile l’emergere del potenziale semiotico in un discorso condiviso riferito a tale contesto. L’azione si realizza con richieste come “chi racconta cosa abbiamo fatto?”. Talvolta l’insegnante chiede di ripetere le azioni compiute con l’artefatto. L’azione risulta spesso efficace proprio quando, in assenza dell’artefatto, si innesca il ricordo e un discorso sul suo uso si sviluppa attraverso segni che esprimono significati personali riferiti ad esso (segni artefatto).

La classe di azioni di *focalizzazione* si presenta come complementare a quelle appena descritte e raccoglie gli interventi mirati a focalizzare l’attenzione su aspetti particolari dell’esperienza con l’artefatto. La complementarità di questa azione rispetto alla precedente sta nel fatto che spesso, nel rievocare l’esperienza vissuta, emergono elementi non immediatamente rilevanti rispetto all'obiettivo didattico. Diventa importante circoscrivere una parte dell'esperienza rispetto al potenziale semiotico: si potranno riprendere espressioni e parole già usate e in questo modo selezionare elementi del loro significato che sono pertinenti rispetto allo sviluppo di significati matematici. Interventi di rispecchiamento (Lumbelli, 1983) risultano appropriati.

Ovviamente è possibile pianificare solo in parte azioni di questo tipo e nella maggior parte dei casi sono decise sul momento, in risposta agli interventi degli allievi. Azioni di ritorno al compito sono spesso accompagnate da focalizzazioni che cercano di filtrare gli aspetti salienti, in un processo ciclico che mira a far convergere l'elaborazione dei significati verso l'obiettivo didattico.

Le azioni di *richiesta di sintesi* sono quelle che l'insegnante compie invitando gli allievi a rendere esplicito ciò che si è discusso e, indirettamente, quello che hanno compreso. Questa azione si realizza con una richiesta del tipo: "Chi vuole sintetizzare quello che abbiamo detto finora?". L'obiettivo è indurre gli allievi a esplicitare i significati personali, ma, allo stesso tempo, la richiesta specifica di sintetizzare induce a condensare le diverse esperienze identificando aspetti comuni; ci si aspetta che una richiesta di sintesi induca gli allievi a generalizzare (decontestualizzare), anche se non è ragionevole pensare che ciò sia automatico. Per questo motivo, la classe di azioni complementare a quella appena descritta è l'*offerta di sintesi* che l'insegnante può compiere, per favorire la risposta degli allievi all'azione di richiesta di sintesi, quando questa risulti complessa per loro. È possibile osservare l'insegnante che delinea una sintesi temporanea e, in questo modo, accoglie e fissa segni già prodotti o ne introduce di nuovi, non necessariamente matematici; obiettivo di questi interventi è quello di ratificare esplicitamente l'accettazione di un segno, il cui uso e il cui statuto vengono legati al contesto matematico.

Indizi che il processo di generalizzazione ha luogo a seguito di interventi di sintesi sono osservabili nell'analisi delle trascrizioni e sono espressi dall'apparire di segni specifici: si tratta, in particolare, di segni che nella loro assoluta neutralità indicano il passaggio da un riferimento ad aspetti particolari dell'esperienza con l'artefatto, ad un riferimento più generale a concetti per i quali non si dispone ancora di segni adeguati. Tali segni, da noi detti segni pivot, sono semanticamente ambigui; hanno la potenzialità di riferirsi sia al contesto dell'artefatto che a quello matematico, e proprio per questa ambiguità possono mettere in relazione significati personali e matematici.

Gli interventi di sintesi, prodotti a seguito di una richiesta o offerti dall'insegnante, hanno lo scopo di produrre e favorire una relazione semiotica stabile tra segni condivisi. Tuttavia, se il quadro descritto finora ci consente di mettere in evidenza l'evoluzione dei significati matematici, non cattura le azioni che l'insegnante mette in atto per far sì che i segni emersi durante la discussione siano effettivamente condivisi dalla totalità degli allievi. L'analisi dei segni ci permette di descrivere la relazione tra di essi, ma non le relazioni che intercorrono tra gli attori della discussione. Le categorie elaborate nel quadro della Teoria delle Situazioni (cfr. sez. 2.3) permettono di integrare questo quadro con uno strumento non puramente semiotico, che tenga conto delle responsabilità nella comunità in cui, chiaramente, il docente assume un ruolo particolare.

3.2. L'azione dell'insegnante per promuovere la condivisione dei significati

La discussione matematica si sviluppa grazie alla tensione tra due poli: da un lato una condivisione di responsabilità nella costruzione cooperativa di segni, dall'altro l'asimmetria tra insegnante e allievi, che indirizza il movimento di evoluzione verso segni matematici.

Dunque, nell'analisi devono essere prese in conto dimensioni diverse lungo le quali avvengono i movimenti topogenetici. Una dimensione verticale, lungo la quale avvengono gli spostamenti di responsabilità tra insegnante e allievi. L'altra orizzontale, individuata dalle relazioni tra studenti e che non sempre trova spazio nelle ricerche in cui il gruppo classe è concepito come unitario (Stein et al., 2008).

Per esempio, l'azione di riformulazione, con la quale l'insegnante introduce nuovi segni a partire da quanto espresso dagli studenti, permette il movimento in entrambe le direzioni. Altre azioni potrebbero invece avere la sola finalità di muoversi in orizzontale, ovvero di condividere tra il maggior numero possibile di allievi la responsabilità e consapevolezza dell'avanzamento. Lo spostamento dai significati personali legati all'uso dell'artefatto a quelli matematici potrebbe essere il risultato della "composizione" di piccoli passi fatti da diversi studenti, la cui unitarietà è percepita solo dall'esperto che osserva la discussione. Questo fenomeno è schematizzato nella Figura 2, dove le frecce rappresentano connessioni tra significati elaborati nel corso di una discussione collettiva. La numerazione dei significati rappresenta il progredire verso il significato matematico. Condizione necessaria per l'efficacia di una discussione è che l'insegnante metta in atto specifiche azioni perché ogni passaggio (da un significato all'altro) non sia trasparente solo per l'allievo che lo ha proposto, ma per tutti. Altrimenti la connessione tra l'attività con l'artefatto e i significati costruiti sarà visibile al solo insegnante.

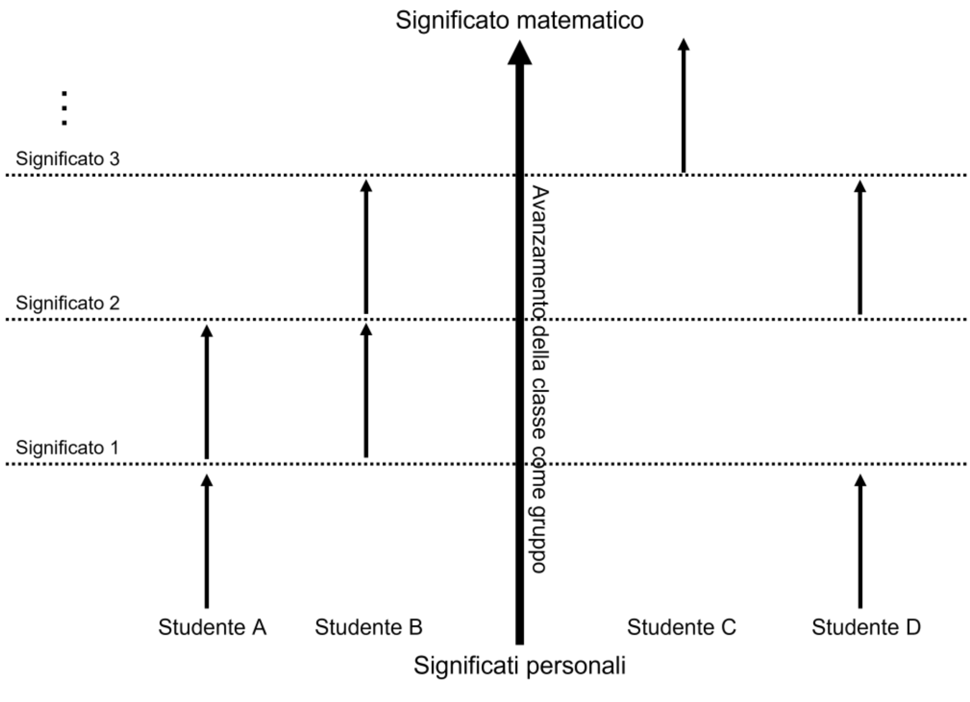

Figura 2. Connessioni tra vari significati elaborati nel corso di una discussione collettiva.

3.3. Azioni a dominanza mesogenetica

La azioni a dominanza mesogenetica permettono di identificare nel processo di Mediazione Semiotica il ruolo svolto dall'insegnante rispetto alla tensione tra obiettivi/attese e la situazione vissuta in classe. Infatti, spiegano processi decisionali complessi che si possono osservare quando l'insegnante dirige la propria azione in risposta ai comportamenti degli allievi.

Il passaggio dalla fase di progettazione alla fase di realizzazione in classe porta a confrontarsi con:

- il milieu potenziale, concepito rispetto ad un allievo generico a partire dall'individuazione del potenziale semiotico;
- i diversi milieu relativi a ciascun allievo nel momento delle attività con l'artefatto, da mettere in relazione con i segni individualmente prodotti;
- il milieu comune che si co-costruisce durante la discussione, attraverso l'interazione tra allievi e insegnante.

Dal punto di vista della Teoria delle Situazioni, l'azione di "ritorno al compito" è un'azione a dominanza mesogenetica, ovvero è orientata sulla ricostruzione di un milieu comune sulla base di attività svolte con l'artefatto. A differenza del milieu potenziale dell'analisi a priori, quello che si cerca di ricostruire è un milieu rispetto al quale i diversi milieu possono armonizzarsi, fornendo la base per una costruzione sociale della conoscenza. Tale costruzione del milieu comune deve prendere in carico esplicitamente la condivisione di segni prodotti dai singoli allievi, la loro elaborazione collettiva e il riconoscimento della validità matematica.

3.4. Azioni a dominanza cronogenetica

Tutte le azioni finalizzate a gestire i tempi della discussione sono classificate a dominanza cronogenetica; tra queste, oltre quella di avvio, di cui di solito è responsabile l'insegnante, durante la discussione è possibile osservare altre azioni del docente. Alcune sono orientate a promuovere l'evoluzione dei significati, altre sembrano rallentare l'evoluzione, ma hanno come obiettivo fondamentale la diffusione del processo semiotico all'interno della classe. Sono realizzate attraverso la richiesta di chiarimenti o spiegazioni su quanto si sta dicendo, oppure attraverso una richiesta di sintesi. In questo modo, da un lato l'insegnante controlla il progredire del discorso, intervenendo con un'azione di focalizzazione; dall'altro cerca di coinvolgere tutti gli allievi nella condivisione dei significati.

Può capitare che alcuni studenti intuiscano il collegamento tra quanto si sta discutendo ed elementi della matematica già noti. L'insegnante potrebbe però ritenere tale collegamento prematuro per gli altri. In questo caso, il docente mette in atto un'interdizione temporanea all'anticipazione. Frasi come "questo lo discuteremo successivamente" sono indici di queste azioni.

Il quadro di riferimento delineato combina le azioni dell'insegnante definite nel quadro della TMS con le azioni dell'insegnante definite da Sensevy e colleghi (2007). Sarà impiegato nell'analisi di una discussione, allo scopo di esemplificarne l'efficacia nel descrivere la dinamica di una discussione matematica.

4. Studio di caso: da un DGS alla definizione di circonferenza

La discussione che analizziamo si svolge in una classe prima della scuola secondaria di primo grado. Gli studenti hanno svolto un'attività individuale con un *software di geometria dinamica* (DGS) e, dopo una settimana, l'insegnante richiama l'attività all'interno di una discussione collettiva.

Agli studenti era stato chiesto di realizzare un segmento col DGS e di misurarne la lunghezza usando il programma. Successivamente, hanno attivato la *traccia* per uno degli estremi. Il comando “traccia” consente di visualizzare l’insieme dei movimenti effettuati da un oggetto attraverso una rappresentazione “continua” (una curva nel caso di un punto). L’insegnante ha chiesto agli alunni di muovere un solo estremo del segmento in modo che la sua lunghezza non vari (Figura 3). Si tratta di una situazione di *trascinamento di mantenimento*; gli studenti devono intuire la curva generata dalla proprietà mantenuta durante il trascinamento, per poi verificare che la curva identificata rispetti effettivamente la proprietà richiesta (Antonini & Baccaglini-Frank, 2015). La circonferenza è la curva che risponde alla consegna data e l’obiettivo durante la discussione è quello di arrivare a una definizione di circonferenza come luogo di punti equidistanti dal centro.

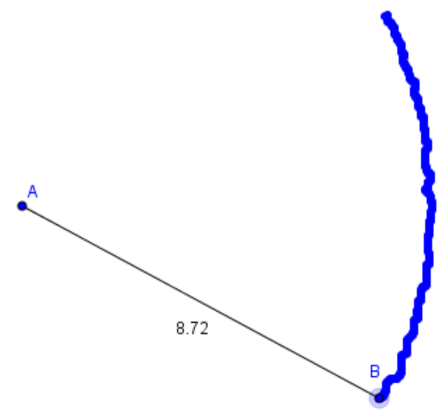

Figura 3. Cosa appare sullo schermo con il trascinamento di mantenimento e la traccia attiva quando lo studente cerca (non sempre con successo) di mantenere invariata la lunghezza di AB.

4.1. Condivisione dei significati contestuali all’artefatto

La discussione inizia con la richiesta di ricordare quanto fatto, riferendosi sia alla consegna proposta, sia alle attività che ne sono seguite. Nel riportare la trascrizione della discussione, l’insegnante è indicato con la lettera T, i nomi degli studenti sono sostituiti con pseudonimi.

1 T: Qualcuno mi descrive com’è che si iniziava? Vai Sebastian

2 Sebastian: Al primo passo?

3 T: Qual era il primo passo?

4 Sebastian: Allora, il primo passo era praticamente vedere quanto misurava il nostro segmento.

5 T: Ok. Ci siete arrivati tutti a farlo questo?

6 Coro: Sì.

7 T: Yassin, cosa volevi dire?

8 Yassin: […] Dovevamo salvare con nome per prima cosa e dopo fare gli esercizi che ci davano e scrivere sul foglio le misure.

9 T: Ok. Allora, avete scritto tutti quanti le vostre misure? Domenico?

10 Domenico: Sì.

11 Coro: Sì.

12 T: Ok. Poi dopo c’era un’altra domanda. Diceva: è possibile spostare il punto B in modo da lasciare la lunghezza sempre uguale?

13 Michael: No!

14 T: Uno alla volta, parliamo tutti. Ushar, che volevi dire?

15 Ushar: Per me non è possibile.

16 T: Perché?

17 Ushar: Perché la misura cambia se lo sposti.

18 Alcune voci: No!

19 T: Siete tutti d’accordo?

20 Coro: No.

21 T: Allora: sentiamo le opinioni degli altri, Ushar. Vanessa, tu cosa volevi dire?

In questo primo estratto possiamo notare varie azioni dell’insegnante. Apre la discussione con un ritorno al compito, con l’obiettivo di far emergere le diverse modalità di affrontarlo. In particolare, possiamo notare un primo scambio nel quale i richiami alla prima richiesta (misurare il segmento disegnato) del compito da svolgere (int. 1-3-9) assicurano una prima condivisione. In effetti, la richiesta alla linea 9 ha una dimensione topogenetica e serve ad assicurarsi che tutti siano partecipi alla prima parte della discussione (movimento orizzontale), per poi spostarsi al passaggio successivo della consegna (movimento verticale). L’intervento 12 si differenzia dagli altri in quanto è l’insegnante stesso a riferire la consegna. Questo intervento assume una connotazione cronogenetica, in quanto sposta la discussione in avanti, passando dalla prima richiesta alla seconda. Segue una serie di interventi con la finalità di stimolare interventi da parte di allievi diversi (14 e 21). Si noti come la richiesta alla linea 19, simile nelle sue finalità a quella della linea 9, stavolta produca una risposta negativa da parte degli allievi (linee 18 e 20); questo induce l’insegnante a rilanciare il problema agli studenti (linea 21). Tutto questo contribuisce a introdurre la norma sociale (nel senso di Yackel & Cobb, 1996) per cui si procede avanti nella discussione solo quando si è raggiunto un accordo tra i partecipanti. Si noti infatti che la frase dell’insegnante (linea 21) inizia con ‘allora’, che sembra avere il significato di “di conseguenza”.

Inoltre, possiamo notare che di fronte all’affermazione di uno studente sull’impossibilità di eseguire il compito (linea 15) l’insegnante non fornisce una validazione dell’affermazione, ma ne richiede una motivazione. Questa richiesta può avere una doppia valenza: da una parte focalizza sull’affermazione dello studente facendola diventare oggetto di discussione (alcuni studenti infatti dissentono, linee 18 e 20) e contemporaneamente rafforza la norma sociale per cui ogni affermazione proposta deve essere motivata.

La discussione prosegue con l’intervento di una studentessa, Vanessa.

22 Vanessa: Si poteva usare il compasso.

23 T: Si poteva usare il compasso. Spiegati meglio.

24 Vanessa: Eh… si usava il compasso al centro [indica con un dito il centro del palmo dell’altra mano] del segmento e si allargava… [fa un gesto con le due mani che si allontanano una dall’altra, ripetuto più volte]

25 T: E così rimaneva sempre lungo uguale?

26 Varie voci: No.

27 T: Ragazzi, uno alla volta parliamo tutti. Alexandra, tu che cosa hai visto invece?

Il primo intervento della ragazza (linea 22) è molto breve, ma il docente ritiene il riferimento al compasso utile per spostare la discussione verso il significato matematico di circonferenza. Di qui la decisione di non validare direttamente l'affermazione della studentessa, ma chiedere di elaborarla attraverso un intervento di rispecchiamento (la frase della ragazza è ripetuta) e l'esplicita richiesta di "spiegarsi" (linea 23). Si tratta di un'azione di focalizzazione che ottiene l'intervento alla linea 24, nel quale la studentessa sembra descrivere l'uso del comando "Compasso" presente sul DGS. Tale comando disegna una circonferenza indicando un punto (il centro) e un segmento (il raggio). Se la dimensione del segmento viene cambiata, la circonferenza varia di conseguenza. Ancora una volta, l'insegnante risponde (linea 25) senza esprimere alcun giudizio, ma riproponendo una questione posta prima da un altro allievo (linea 17) ovvero l'invarianza (o meno) della lunghezza del segmento. Questo intervento ha una valenza sia cronogenetica, riportando la discussione a un momento precedente che mesogenetica; in particolare, cercando di avvicinare riferimenti a milieu diversi, sembra che l'insegnante voglia creare un conflitto rispetto al legame che intercorre tra l'uso del compasso in un DGS e l'invarianza della lunghezza del segmento. Il conflitto generato pare fruttuoso, tant'è che vari studenti intendono intervenire su questo tema (linea 26). Questo richiede l'intervento del docente per moderare la discussione (linea 27), che prosegue con gli interventi di alcuni studenti che tuttavia sono analoghi e quindi non riportiamo per brevità. In questo momento della discussione non si introducono nuovi significati, ma si mira a condividere quelli che sono emersi: il movimento è soprattutto orizzontale.

4.2. Dai segni artefatto ai segni matematici

La discussione prende nuovamente una direzione verticale a seguito dell'intervento di Romina, che si discosta da quelli dei compagni.

35 T: Romina, tu che pensi invece?

36 Romina: Che a me mi [sic!] è venuto 2,51 e ho pensato che il segmento [pollice e indice aperti nello spazio gestuale] che ho fatto poteva essere come il diametro di un [mima un cerchio unendo le dita, Figura 4a] cerchio. Così ho usato la circonferenza l'ho messo al centro e mi è venuto [disegna una circonferenza nell'aria, Figura 4b] penso che sia stato il totale [ripete il gesto]

37 T:Allora, Romina dice: ho pensato che poteva essere come il diametro di un cerchio. Siete d'accordo con questa cosa che ha detto Romina?

38 Ushar: Io sì!

39 Coro: Io sì!

40 T: Allora sentiamo Adele, che aveva la mano alzata, che cosa aveva da dire e che cosa pensa di quello che ha detto Romina.

41 Adele: Io, quello che volevo dire era che il mio segmento misurava 5,48 e che quando lo spostavo c'erano misure inferiori o misure più grandi. Però, con molta attenzione, qualche volta veniva.

42 T: E rispetto a quello che aveva detto Romina? Romina, ripeti com'è che l'avevi detto.

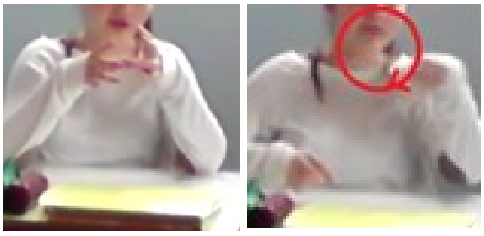

Figura 4. I gesti di Romina.

L'intervento di Romina è ricco di segni matematici. Se finora il discorso si è riferito solo ai comandi producendo una grande varietà di segni artefatto, l'intervento di Romina introduce il significato di cerchio e di diametro, rappresentati sia verbalmente che da gesti che ne mimano la relazione. I segni matematici introdotti sono poi messi in relazione con il segno 'circonferenza', che seppure riferito da Romina al comando presente nel DGS ('ho usato la circonferenza') è un termine matematico. Questa parola ha dunque il potenziale di mettere in relazione l'attività svolta con l'artefatto che è obiettivo dell'azione didattica dell'insegnante (è quindi un segno pivot). Lo stesso vale per il secondo gesto compiuto dalla ragazza (Fig. 4b) che richiama il movimento fatto dal punto durante l'attività col DGS e contemporaneamente rappresenta l'oggetto ottenuto da tale attività (chiamato il "totale"). L'uso del termine diametro non è appropriato, ma l'insegnante non rileva la scorrettezza, piuttosto chiede agli studenti di intervenire, rispecchiando le parole di Romina (linea 37) senza commenti. Questo tipo di intervento dell'insegnante da una parte insiste sulla norma sociale per cui la validità delle affermazioni è da discutere, dall'altra agisce a livello mesogenetico e focalizzando sull'intervento della studentessa chiede agli altri di commentare. L'obiettivo è quello di indurre gli allievi a produrre nuovi segni elaborando i significati espressi da lei. In questo senso, l'intervento dell'insegnante assume valenza topogenetica, incoraggiando gli altri membri della classe a condividere il movimento in verticale di questa studentessa.

Diversi studenti concordano con l'affermazione di Romina; l'insegnante non commenta, ma dà la parola agli altri. L'intervento di Adele (linea 41) riporta la discussione alla consegna, risultando conforme con richieste fatte dall'insegnante in momenti precedenti (linee 9 e 12). Questo mostra come sarebbe stato pericoloso andare avanti nella discussione dando per scontato che quello che è stato detto da Romina fosse stato accettato da tutti.

L'insegnante lascia parlare e proporre varie soluzioni del compito; l'obiettivo è che ciascuno partecipi esplicitando il proprio procedimento e cercando di metterlo in relazione con quello altrui. La richiesta di una proposta più pertinente rispetto all'obiettivo delle altre non viene esplicitata se non attraverso un ritorno di focalizzazioni sull'intervento di Romina (linea 42).

In seguito, parlando dei termini legati al cerchio emerge una discussione sulla differenza tra raggio e diametro; si svolge con l'intervento di alcuni studenti che fanno alcuni disegni alla lavagna. Discutendo i vari tentativi proposti, emerge che il raggio debba avere un estremo nel centro del cerchio. L'insegnante quindi riporta la discussione al momento in cui era stata interrotta.

114 T: Adesso siamo tutti d'accordo che quello è un raggio?

115 Coro: Sì!

116 T: Allora ci siamo messi d'accordo dicendo che deve passare dal centro, deve toccare il centro. Su questo siam tutti d'accordo?

117 Alcune voci: Sì.

[…]

128 T: Ragazzi, altre idee? Altre opinioni su questa cosa? [silenzio] Questo segmento, che noi avevamo disegnato e muovevamo, come si muoveva? Che cosa faceva venir fuori e come stava messo? [Celeste alza la mano] Celeste?

129 Celeste: In che senso come stava messo?

130 T: Immaginiamoci il cerchio che vi è venuto fuori quando avete mosso [disegna una circonferenza nell'aria] la traccia. Il vostro segmento, se questo [percorre con la mano la circonferenza disegnata sulla lavagna] fosse il cerchio formato dalla vostra traccia, quel segmento dove stava?

131 Celeste: Il mio stava…

132 Daniel: Al centro! Al posto del diametro!

133 T: Così? [indica il disegno sulla lavagna in cui è rappresentato un cerchio col suo diametro]

134 Daniel: No.

135 Celeste: Sì!

136 Alexandra: È il raggio!

137 T: Qualcuno ha detto il diametro, qualcuno ha detto il raggio

138 Celeste: È vero è il raggio.

139 T: Cerchiamo di metterci d'accordo

140 Daniel: È il raggio! Muovendo il raggio intorno [disegna un arco col dito]. Cioè, attaccato [indica un punto nello spazio gestuale] a un punto, muovendo [muove l'indice dell'altra mano disegnando una circonferenza centrata nella punta dell'altro indice] gira.

La sintesi offerta dall'insegnante (linea 114) è aperta dalla frase "siamo tutti d'accordo che …" che fa da specchio alla domanda ricorrente "siete tutti d'accordo …?" (per es. linea 19 e poi linea 139) e sottolinea che si è raggiunto lo scopo comune: formulare risposte condivise al problema posto.

Segue una richiesta di sintesi. Di fatto la discussione sul significato dei termini 'raggio' e 'diametro' è stata sul piano matematico. L'insegnante sollecita un collegamento tra i disegni fatti alla lavagna e l'attività svolta col DGS. Tale collegamento viene fatto esplicitamente dall'insegnante chiedendo di immaginare che la circonferenza tracciata alla lavagna rappresenti la traccia del punto sullo schermo del computer (linea 130). Si procede per analogie: se il cerchio rappresenta la traccia, a cosa corrisponde il segmento sul DGS? Le risposte non sono univoche. L'insegnante lo sottolinea (linea 137) e propone di discuterne per accordarsi (linea 139). Questa richiesta scaturisce effetto: se le prime risposte sono solo del tipo "è il diametro" o "è il raggio", alla richiesta di mettersi d'accordo risponde una risposta motivata (linea 140). La motivazione di Daniel richiama soprattutto il movimento fatto nel DGS, ma viene specificato che il segmento è "attaccato" a un punto.

In base al gesto compiuto dal ragazzo, tale punto è il centro e quindi il segmento deve essere il raggio perché prima si era accordato che il raggio “deve toccare il centro” (linea 116).

La richiesta dell’insegnante di mettersi d’accordo sortisce diversi effetti. Rallenta la discussione (piano cronogenetico) onde evitare che giungere rapidamente alla conclusione che si tratti del raggio comporti una mancata condivisione dei significati (piano topogentico). Permette di elaborare ulteriormente sul significato dei termini mantenendo la connessione tra l’attività svolta con l’artefatto e la matematica in gioco (piano mesogenetico).

Questo tipo di azione ricorre spesso in questa discussione. Infatti, gli interventi degli studenti aumentano ed emergono altri segni come la parola “pallini” per far riferimento ai punti rappresentati nel DGS e la parola “distanza” per la lunghezza del segmento (distanza tra i suoi estremi). L’alto numero di segni emersi spinge l’insegnante alla richiesta di fare sintesi.

193 T: Allora facciamoci un disegno e poi la scriviamo. Allora, c’è qualcuno che vuole provare a dirmela questa cosa in un modo chiaro e preciso? Poi la possiamo sempre modificare, mettendo le idee insieme. Sara tu avevi alzato la mano e poi l’hai riabbassata. Ma su questa cosa di cui stiamo parlando adesso sei d’accordo?

194 Sara: Sì.

195 T: Vuoi provare a dirmi com’è che la possiamo scrivere [Sara fa cenno di no con la testa] Dai! Provaci, poi la sistemiamo.

196 Sara: Non mi viene cosa dire.

197 T: Prova a dirla a modo tuo, poi la sistemiamo, non ti preoccupare. Allora: se noi prendiamo un puntino che sta sul bordo del cerchio…

198 Sara: La distanza tra quel puntino e il centro del cerchio è sempre uguale.

199 T: La distanza tra il puntino… [mentre lo ripete lo scrive alla lavagna] Qualsiasi puntino avevi detto?

200 Sara: Sì

201 T: Allora ce lo aggiungo. Qualsiasi…

202 Sara: Puntino e il centro del cerchio è sempre uguale.

203 T: Allora, io mi sono dimenticato però di scrivere la frase che avevo detto io all’inizio che poi Sara ha continuato. Me la sono anche scordata, mi dite cosa ci devo mettere prima? Qui c’è scritto [legge dalla lavagna] la distanza fra il puntino e il centro del cerchio è sempre uguale. Ma qualsiasi puntino in assoluto?

La “cosa” a cui l’insegnante fa riferimento (linea 193) è una frase di un altro alunno. Qui l’insegnante richiede esplicitamente l’intervento di Sara che non ha partecipato a questa fase della discussione. Così, l’insegnante coinvolge la studentessa e allo stesso tempo valuta se i significati emersi nella discussione sono accessibili anche a lei. Si tratta di un’azione a dominanza topogenetica. Sara si dice d’accordo con l’affermazione del compagno, ma il suo assenso potrebbe essere frutto della norma sociale maturata nella classe per cui, se si è d’accordo, si va avanti col discorso. Pertanto, la studentessa potrebbe solo sperare che il docente prosegua la discussione senza interpellarla di nuovo. Il docente insiste richiedendole una sintesi. I suoi interventi sono incoraggianti, viene infatti affermato che le frasi saranno poi sistemate (linea 195 e 197). La possibilità che avvengano sbagli è riconosciuta e accettata, il che stabilisce una norma sociale.

Al rifiuto della ragazza l'insegnante non propone la sintesi e attua un intervento di scaffolding: inizia la frase lasciandola in sospeso perché sia la studentessa a completarla. L'intervento ha successo e la studentessa dimostra un uso proprio delle parole che prima erano state di un compagno; fornisce una sintesi parziale che viene trascritta dal docente alla lavagna, diventando così accessibile per l'intera classe.

L'insegnante, tuttavia, non conclude la discussione, ma richiede agli studenti di dare significato a quella frase parziale riportata alla lavagna. La domanda è rivolta a tutti e assume così una dimensione topogenetica data dalla volontà di condividere i significati emergenti tra il maggior numero possibile di alunni della classe.

Nell'ultima domanda (linea 203) i termini matematici sono mescolati a quelli riferiti all'artefatto: si parla di centro del cerchio ma anche di pallini. La discussione terminerà con la formulazione alla lavagna di una definizione condivisa, infine istituzionalizzata dall'insegnante proponendo di sostituire la parola 'pallini' con 'punti' con la motivazione di voler far uso di "parole della geometria" (linea 254). Una volta prodotta la definizione, gli studenti sono invitati a registrarla sul proprio quaderno: "Siam tutti d'accordo con questa frase? Allora, […] scriviamocela sul quaderno" (linea 264).

5. Conclusioni

Volendo descrivere le azioni che l'insegnante compie durante la discussione collettiva, abbiamo integrato il quadro della TMS, utile a descrivere lo sviluppo dei segni personali verso significati matematici, con le categorie di azione proposte da Sensevy e colleghi (2005). Nell'esempio di analisi presentato abbiamo notato come un singolo intervento da parte del docente potesse avere svariate finalità in termini di promuovere l'evoluzione di significati e/o di rendere tutti gli studenti partecipi nella progressione della catena semiotica. Siamo così riusciti a descrivere, con un approccio microgentico, sia il modo in cui la definizione costruita è legata all'attività con un DGS, sia la condivisione di responsabilità per questo processo tra gli studenti e tra loro e il docente. In questo senso, non solo l'integrazione dei quadri non sembra presentare incompatibilità teoriche, ma appare addirittura evidente una complementarità.

Questa tipologia di strumenti di analisi è sicuramente importante per ricerche, in didattica della matematica, mirate a descrivere l'evoluzione di significati a partire dall'uso di strumenti. Potrebbe però anche avere un risvolto pratico nella formazione dei docenti. Questi quadri teorici possono essere presentati ai futuri insegnanti, con la finalità di prepararli a gestire la complessa rete di significati che emerge in queste discussioni matematiche.

Riferimenti bibliografici

Antonini, S., & Baccaglini-Frank, A. E. (2015). Il trascinamento di mantenimento nella formulazione di congetture in ambienti di geometria dinamica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 38*(3), 257–278.

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *RELIME, 9*(1), 267–299.

Bartolini Bussi, M. G., Boni, M., & Ferri, F. (1998) *Interazione sociale e conoscenza a scuola: la discussione matematica*. Modena: Centro documentazione educativa.

Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M.A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. D. English (a cura di), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 750–787). Londra: Routledge.

Bonaiuti, G., Calvani, A., & Ranieri, M. (2007). *Fondamenti di didattica. Teoria e prassi dei dispositivi formativi*. Roma: Carocci.

Brousseau, G. (1997) *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Brousseau. G. (2011). *Glossaires*. https://guy-brousseau.com/biographie/glossaires/ (ver. 15.03.2022).

Damiano, E. (2013). *La mediazione didattica. Per una teoria dell'insegnamento*. Milano: Franco Angeli.

Falcade, R. (2006). *Théorie des Situations, médiation sémiotique et discussions collectives, dans des séquences d'enseignement avec Cabri-géomètre pour la construction des notions de fonction et graphe de fonction*. Tesi di dottorato non pubblicata, Université Joseph-Fourier, Grenoble, France. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00085202 (ver. 15.03.2022).

Giusti, E. (1999). *Ipotesi sulla natura degli oggetti matematici*. Torino: Bollati Boringhieri.

Lumbelli, L. (1983). *La novità come risorsa educativa*. Milano: FrancoAngeli.

Mariotti, M. A. (2009). Artifacts and signs after a Vygotskian perspective: the role of the teacher. *ZDM, 41*(4), 427–440.

Mariotti M.A., & Maracci, M. (2011). Resources for the Teacher from a Semiotic Mediation Perspective. In Gueudet G., Pepin B., & Trouche L. (a cura di) *From Text to 'Lived' Resources. Mathematics Teacher Education, vol 7* (pp. 59–75). Cham: Springer.

Pellerey, M. (1983) *Per un insegnamento della matematica dal volto umano*. Società Editrice Internazionale.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies; approche cognitive des instruments contemporains*. Tonnerre: Armand Colin.

Sensevy, G., Schubauer-Leoni, M. L., Mercier, A., Ligozat, F., & Perrot, G. (2005). An attempt to model the teacher's action in the mathematics class. *Educational Studies in Mathematics, 59*(1-3), 153–181.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(4), 313–340.

Wertsch, J. V. (1991). A sociocultural approach to socially shared cognition. In L. B. Resnick, J. M. Levine, & S. D. Teasley (Eds.), *Perspectives on socially shared cognition* (pp. 85-100). Washington, DC: APA.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458–477.