Form@re
Open Journal per la formazione in rete

articoli

Un’attività di formazione per insegnanti di scuola secondaria di primo grado: analisi di prove Invalsi di matematica

An educational activity for middle school teachers: analysis of Invalsi mathematics tests

Francesca Martignone[a]

[a] *Università del Piemonte Orientale, francesca.martignone@uniupo.it*

Abstract

Questo articolo mostra come l’analisi di quesiti delle prove Invalsi di matematica possa diventare un mezzo per sviluppare attività di formazione per insegnanti di matematica di scuola secondaria di primo grado. Attraverso il confronto tra pari e con il docente formatore, gli insegnanti possono acquisire nuove chiavi di lettura delle prove Invalsi di matematica facendo propri alcuni strumenti interpretativi e di analisi provenienti dalla ricerca in didattica della matematica. In particolare, nelle attività di formazione che saranno descritte, gli insegnanti condividono un approccio strutturato nello sviluppo di un’analisi a priori di quesiti di matematica che tiene conto dell’intreccio di aspetti istituzionali, epistemologici, cognitivi e didattici. Queste attività di formazione hanno favorito lo sviluppo e la condivisione di conoscenze e abilità che possono essere identificate come conoscenze specialistiche per l’insegnamento.

Parole chiave: formazione insegnanti; prove standardizzate di matematica; prove Invalsi; analisi a priori.

Abstract

This paper shows how the analysis of items of Italian national standardized mathematics tests (Invalsi) can become a means to develop teacher education programs for mathematics middle school teachers. Through the comparison among peers and the teacher educator, the teachers can develop new lenses to look at the Invalsi mathematics tests using interpretative tools from research in mathematics education. In particular, in the educational activities that will be described, the teachers share a structured approach in the development of an a priori analysis of mathematics problems that takes into account institutional, epistemological, cognitive, and didactic aspects. These educational activities foster the development and sharing of knowledge and skills that can be identified as specialized knowledge for teaching.

Keywords: teacher education; mathematics standardized tests; Invalsi tests; a priori analysis.

1. Introduzione

In Italia il Sistema Nazionale di Valutazione (SNV) è gestito dall'Istituto Nazionale per la Valutazione del Sistema educativo di Istruzione e di formazione (Invalsi). L'Invalsi è soggetto alla vigilanza del Ministero dell'Istruzione, Università e Ricerca (MIUR) e attua verifiche periodiche e sistematiche sulle conoscenze e abilità degli studenti (D.Lgs. n. 286/2004) raccogliendo dati comparabili su tutto il territorio nazionale. In base alla direttiva MIUR annuale 76/2009, l'Invalsi ha il compito di valutare i livelli di apprendimento degli studenti di scuola primaria e secondaria di primo e secondo grado (ad oggi le rilevazioni sono effettuate nei livelli 2, 5, 8, 10[1], ma dal 2010 al 2013 era stato coinvolto anche il livello 6[2]). La misurazione degli apprendimenti avviene mediante prove standardizzate che riguardano italiano e matematica. Queste prove sono solitamente chiamate "prove Invalsi" e sono progettate tenendo conto delle "Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione" e delle Indicazioni Nazionali e Linee guida per le scuole secondarie di secondo grado.

Questo articolo discute un esempio di attività di formazione per insegnanti di matematica della scuola secondaria di primo grado focalizzata sull'analisi delle prove Invalsi. Queste attività sono state svolte nei corsi di Didattica della Matematica tenuti dall'autore di questo articolo per i corsi TFA (Tirocinio Formativo Attivo) e PAS (Percorso Abilitante Speciale)[3] per la classe A059 (Scienze Matematiche, Chimiche, Fisiche e Naturali nella scuola secondaria di primo grado). Le attività di formazione hanno avuto l'obiettivo di sviluppare la professionalità degli insegnanti attraverso l'analisi e la discussione di quesiti Invalsi selezionati da uno studio condotto da ricercatori in Didattica della Matematica (Branchetti et al., 2015). Nei corsi di formazione si è voluta proporre una nuova prospettiva di analisi delle prove Invalsi, fornendo agli insegnanti diverse chiavi di lettura delle prove. In questo modo i dati e le informazioni provenienti dalla valutazione nazionale possono diventare motori per sviluppare attività didattiche nelle scuole, e quindi agenti di cambiamento. Trinchero (2014) affronta questa problematica legata al ruolo delle prove Invalsi rispondendo alle seguenti domande: "Qual è la funzione del Servizio Nazionale di Valutazione formativa degli istituti scolastici? A cosa servono davvero le prove Invalsi? Le critiche che spesso vengono mosse a queste prove sono veramente fondate? Come può la valutazione dell'offerta formativa scolastica costituire davvero un agente di miglioramento?" (p. 34). Il presente articolo intende rispondere ad altre domande, collegate a quelle affrontate da Trinchero, ma focalizzate su come i dati e le informazioni provenienti dalle rilevazioni Invalsi, in particolare riguardanti le prove di matematica per il primo ciclo di istruzione, possano diventare oggetto di riflessione in corsi di formazione per gli insegnanti. Per questo, saranno mostrati esempi di attività di formazione in cui si è cercato di fornire alcune possibili risposte alle seguenti domande: come si possono usare le prove Invalsi, e i loro risultati, per sviluppare attività di formazione per gli insegnanti? Quali lenti interpretative si possono proporre per analizzare le prove Invalsi di matematica? Per un insegnante, le rilevazioni Invalsi possono diventare una fonte di informazioni utile

---

[1] Livello 2: classe seconda della scuola primaria. Livello 5: classe quinta della scuola primaria. Livello 8: classe terza della scuola secondaria di primo grado. Livello 10: classe seconda della scuola secondaria di secondo grado.

[2] Livello 6: classe prima della scuola secondaria di primo grado.

[3] I TFA e i PAS sono due programmi nazionali post-laurea per il conseguimento dell'abilitazione per l'insegnamento. Questi progetti di formazione seguono le indicazioni del MIUR (D.M. 249/2010 e successive modifiche) e sono gestiti dalle università.

all'identificazione di difficoltà degli studenti o di argomenti che possono essere maggiormente approfonditi?

Nelle attività dei corsi di formazione che saranno descritte in questo articolo, gli insegnanti e il docente formatore hanno analizzato diversi quesiti selezionati dalle prove Invalsi di matematica per la scuola secondaria di primo grado, discutendo diversi aspetti riguardanti: i contenuti matematici, i collegamenti con le Indicazioni Nazionali e le possibili strategie risolutive degli studenti. Le difficoltà analizzate sono legate a contenuti fondamentali (in verticale) nell'insegnamento-apprendimento della matematica indicati nei traguardi per lo sviluppo delle competenze e degli obiettivi di apprendimento sanciti dalle Indicazioni Nazionali per il primo ciclo d'istruzione. Per svolgere questo tipo di analisi è necessario sviluppare conoscenze e abilità che caratterizzano il lavoro di un insegnante perché coinvolgono sia aspetti legati ai contenuti della materia, sia aspetti pedagogici. Nelle conclusioni di questo articolo si discuterà sulle caratteristiche di questo tipo di conoscenze che possono essere identificate come conoscenze specialistiche per l'insegnamento (Ball, Thames & Phelps, 2008).

2. Background

Per comprendere meglio gli obiettivi e le scelte fatte nella progettazione di un programma di formazione per insegnanti è necessario esplicitare il quadro culturale e di sistema educativo all'interno del quale questo si sviluppa (Bartolini Bussi & Martignone, 2013). Come specificato in precedenza, le attività di formazione che saranno oggetto della nostra discussione sono state svolte in percorsi per il conseguimento dell'abilitazione all'insegnamento: PAS e TFA. La frequenza a questi corsi era obbligatoria e al termine di ciascun corso era previsto un esame finale. Le attività che analizzeremo sono state condotte nei corsi e nei laboratori di Didattica della Matematica dell'Università del Piemonte Orientale per la classe A059. Le lezioni si sono svolte in presenza, utilizzando una piattaforma Moodle per condividere e discutere materiali. Gli insegnanti hanno sempre mantenuto un impegno costante nella produzione, condivisione e discussione dei materiali: tutti gli insegnanti hanno lavorato sia individualmente, sia in piccolo gruppo su specifiche consegne e hanno puntualmente consegnato i materiali attraverso il forum del corso. Per gli insegnanti è stata un'occasione di confronto con colleghi con diverse esperienze e formazioni, e con docenti universitari che si occupano di ricerca in didattica. La condivisione di conoscenze tra insegnanti e con il docente formatore è stato l'elemento caratterizzante le attività di questi corsi di formazione. Questa condivisione si sviluppa attraverso un processo di trasposizione meta-didattica (Aldon et al., 2013)[4]: un processo dinamico attraverso il quale si condividono pratiche educative e lenti teoriche tra insegnanti e docenti formatori (Martignone, 2015).

Il termine "meta-didattica" sottolinea che queste pratiche consistono in riflessioni su attività didattiche. Queste azioni di riflessione possono essere favorite da particolari prassi che comprendono diversi tipi di compiti (in questo caso l'analisi a priori di quesiti di matematica), insieme alle tecniche disponibili per risolverli (ad esempio lo sviluppo di metodologie e schemi per l'analisi dei quesiti). Negli studi portati avanti negli ultimi anni

[4] Il modello proposto da Aldon e colleghi (2013) per la descrizione del processo di trasposizione meta-didattica è abbastanza recente e finora applicato per analizzare alcuni esempi di programmi di formazione in servizio per insegnanti di matematica.

nel campo della formazione degli insegnanti, emerge come una buona collaborazione e la fiducia reciproca tra insegnanti e ricercatori è fondamentale per la formazione di entrambe le parti (Jaworski & Huang, 2014; Krainer, 2011). Le attività dei corsi di formazione che descriveremo sono progettate tenendo conto di queste ricerche e quindi mirano a condividere con gli insegnanti specifiche prassi di analisi e riflessioni con l'obiettivo di costruire una *community of inquiry* (Jaworski, 2003; Wells, 1999). In una community of inquiry i partecipanti sono spinti dal desiderio di scoprire, fanno domande, cercano di capire collaborando con altri nel tentativo di produrre risposte. Tutti, singolarmente o in gruppo, danno il loro contributo per lo sviluppo della pratica attraverso attività di riflessione critica e questo concorre al continuo sviluppo dell'intera comunità. Questo approccio è coerente con la peculiarità italiana di formare insegnanti-ricercatori (Arzarello & Bartolini Bussi, 1998): gli insegnanti sono partecipi nella ricerca e i ricercatori nella pratica. Anche la scelta di analizzare quesiti tratti dalle prove di valutazione nazionale è legata a fattori specifici del contesto italiano: queste prove, infatti, sono somministrate ogni anno all'intera popolazione di studenti italiani per valutarne gli apprendimenti e, per questo, gli insegnanti devono confrontarsi con i risultati ottenuti. Inoltre i docenti della scuola secondaria di primo grado sono particolarmente interessati alla discussione sui quesiti Invalsi perché queste prove fanno parte dell'Esame di Stato al termine del primo ciclo di istruzione (livello 8) e quindi i risultati di queste contribuiscono alla valutazione finale dei loro studenti. Naturalmente, essendo le prove Invalsi prove standardizzate, non possono valutare l'intera complessità dei processi nell'insegnamento-apprendimento della matematica, ma possono sicuramente dare informazioni importanti su come gli studenti affrontano quelle specifiche prove.

Un altro fattore che ha influenzato la scelta di analizzare quesiti Invalsi è che il docente del corso di formazione, dal 2014, stava svolgendo una ricerca su queste prove (Branchetti et al., 2015) e quindi ha voluto condividerne i risultati con gli insegnanti. Il progetto di ricerca, dal titolo "Un approccio longitudinale per l'analisi delle prove Invalsi di matematica: cosa ci può dire sugli studenti in difficoltà"[5], propone un'analisi integrata, qualitativa e quantitativa, che fornisce materiale per una riflessione sulle prove di valutazione nazionale di matematica. Questa ricerca ha selezionato, nelle prove di valutazione nazionale dei diversi livelli, quesiti che identificano situazioni di difficoltà legate a contenuti fondamentali (in verticale) nell'insegnamento-apprendimento della matematica. Solo state individuate catene di quesiti (ossia quesiti somministrati in livelli successivi che possono essere collegabili attraverso l'intreccio di analisi qualitative e quantitative) in cui gli studenti, con prestazioni basse nelle prove, avevano una maggiore probabilità di dare una risposta sbagliata in confronto agli altri studenti. Nella presentazione delle attività di formazione è stato subito esplicitato che, attraverso lavori di gruppo e discussioni collettive, si sarebbero discusse le analisi elaborate in questo progetto di ricerca in modo da condividere alcune lenti interpretative per analizzare le prove Invalsi di matematica. Queste analisi integrano l'elaborazione dei dati provenienti da analisi statistiche (sia già

[5] Progetto svolto per il concorso pubblico "Idee per la Ricerca" bandito dall'Invalsi nell'ambito della convenzione stipulata tra MIUR e Invalsi in data 24.04.2009 affidando all'Istituto il progetto "Sistema Informativo Integrato" Cod. naz. I-3-FSE-2009-1 cofinanziato con fondi a valere sul Programma Operativo Nazionale "Competenze per lo sviluppo" FSE-2007-IT 05 1 PO 007, http://www.invalsi.it/invalsi/concorsi.php?page=procedure_concidee_att .

fornite da Invalsi[6], sia prodotte nella ricerca stessa) con analisi qualitative dei singoli quesiti.

Nel paragrafo successivo sono analizzate parti delle attività di formazione svolte nei corsi PAS e TFA. Si presenteranno esempi di analisi, supportate da lenti teoriche provenienti dalla ricerca, volte a promuovere le riflessioni degli insegnanti sugli aspetti epistemologici, cognitivi e didattici. Successivamente si mostreranno esempi di analisi a priori di quesiti Invalsi: questa pratica, anche se comune nella progettazione di sperimentazioni didattiche, spesso non lo è per gli insegnanti che più frequentemente analizzano il comportamento degli studenti al termine di un'attività.

3. Analisi dei quesiti Invalsi

Questo paragrafo presenta alcune delle consegne proposte, durante il corso di Didattica della Matematica, agli insegnanti coinvolti nei programmi PAS e TFA dell'Università del Piemonte Orientale per la classe A059. Nelle community of inquiry dei corsi vengono condivisi compiti, tecniche e lenti teoriche frutto dell'integrazione tra risultati di studi in didattica della matematica e le conoscenze ed esperienze degli insegnanti. Queste attività hanno seguito un approccio laboratoriale in una prospettiva post-vygotskiana (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008; Vygotskij, 1978). Gli insegnanti hanno imparato facendo, vedendo fare e comunicando con i colleghi e con il docente formatore. Da un punto di vista metodologico, il corso ha avuto anche l'obiettivo di mostrare la potenzialità educativa dell'interazione tra colleghi ed esperti, sia nelle attività di piccolo gruppo, sia durante le discussioni collettive.

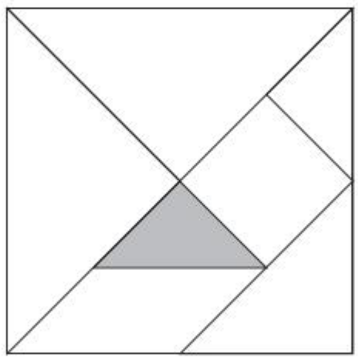
3.1. La scelta dei quesiti e gli aspetti chiave analizzati

Come primo passo delle attività di formazione, il docente formatore ha analizzato un quesito che era stato selezionato nello studio delle prove Invalsi condotto dal gruppo di ricerca di cui fa parte (Branchetti et al., 2015). L'analisi statistica sul campione nazionale aveva permesso di identificare, in ciascuna prova, un gruppo di studenti con performance basse (e quindi in difficoltà nella prova), ma anche i singoli quesiti in cui le loro percentuali di risposte corrette erano molto inferiori rispetto agli altri gruppi di studenti. La tecnica usata per classificare gli studenti e per studiare le caratteristiche delle domande è la *Latent Class Analysis* (Lazarsfeld & Henry, 1968; Van der Linden & Hambleton, 1997). Questo metodo statistico fornisce una classificazione degli studenti in un numero fissato di gruppi caratterizzati da diversi livelli di performance. La classificazione è basata sulle probabilità stimate di risposta corretta per ogni quesito. Integrando questo approccio quantitativo con lenti interpretative di tipo qualitativo, sono stati individuati i quesiti che trattavano analoghi concetti matematici ed erano affrontabili sviluppando schemi risolutivi simili (Vergnaud, 2009). L'analisi del gruppo di ricercatori era partita dallo studio delle prove di livello 8, ossia il termine del primo ciclo d'istruzione, per poi individuare quesiti simili nei livelli

[6] I risultati quantitativi, provenienti dall'indagine sul campione nazionale, sono pubblicati ogni anno al termine dell'anno scolastico così come le prove somministrate nei diversi livelli scolari. Tutte le prove Invalsi, con i relativi risultati sul campione nazionale sono raccolti in un database (http://www.gestinv.it/).

scolari precedenti (Branchetti et al., 2015). Tutti i dati e i risultati di questa ricerca sono stati condivisi con gli insegnanti. In Figura 1 è riportato il primo quesito discusso.

In figura è rappresentato il gioco del Tangram con i pezzi che lo compongono.



A quale frazione dell'area del Tangram corrisponde il pezzo colorato in grigio?

A. ☐ Un settimo

B. ☐ Un ottavo

C. ☐ Un quindicesimo

D. ☐ Un sedicesimo

Figura 1. Quesito D25, livello 8 (Invalsi, 2013).

Si tratta di un quesito a risposta multipla con quattro opzioni di scelta di cui solo una corretta: l'opzione D. Le percentuali di risposta sul campione nazionale sono rappresentate nella Figura 2.

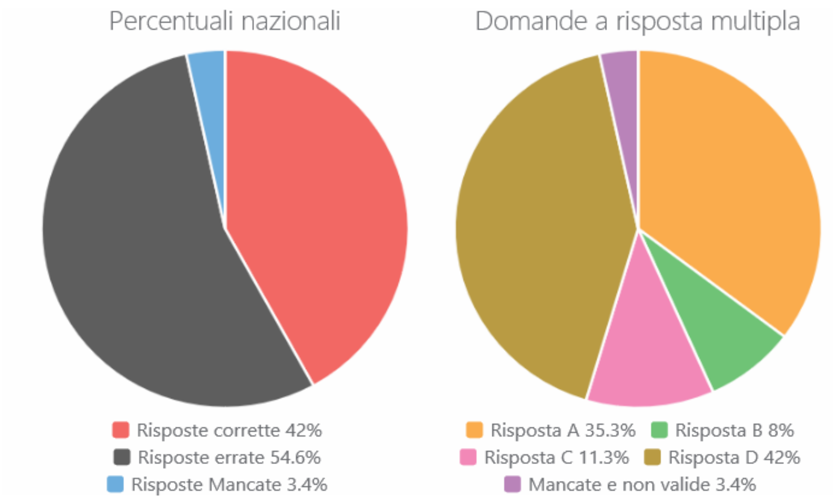


Figura 2. Percentuali di risposta per il quesito D25, livello 8 (Invalsi, 2013). Il primo areogramma rappresenta le percentuali di riposte corrette, errate e mancate. Il secondo aerogramma indica le percentuali di risposta relative alle diverse opzioni (http://www.gestinv.it/Matematica.aspx).

Attraverso la Latent Class Analysis è stato individuato il gruppo di studenti (23% del campione) con le probabilità di risposta corretta più basse. Nonostante globalmente la D25 sia risultata una domanda medio-facile (Figura 2), questo gruppo di studenti ha registrato una probabilità di risposta corretta pari a 14%, mentre le altre classi oscillano tra 30% e 81%. Per questi motivi il quesito sembrava essere una buona domanda per individuare studenti in difficoltà e, di conseguenza, per studiare possibili errori e misconcezioni. Per quanto riguarda lo scopo della domanda, il suo legame con le Indicazioni Nazionali e i commenti alle diverse opzioni di risposta, riportiamo in Figura 3 l'estratto dalle "Guide alla lettura" (https://invalsi-areaprove.cineca.it/), pubblicate da Invalsi, che è stato discusso con gli insegnanti.

Caratteristiche	Descrizione e commento
AMBITO PREVALENTE Numeri **SCOPO DELLA DOMANDA** Saper scomporre una figura in parti equivalenti ed esprimere la parte individuata come rapporto. **PROCESSO PREVALENTE** Riconoscere in contesti diversi il carattere misurabile di oggetti e fenomeni, utilizzare strumenti di misura, misurare grandezze, stimare misure di grandezze **Indicazioni nazionali** *Utilizzare il concetto di rapporto tra numeri o misure ed esprimerlo sia nella forma decimale, sai mediante frazione.* **RISULTATI DEL CAMPIONE**	**BLOCCO A** **Risposta corretta: D** Per rispondere al quesito è necessario scomporre la figura in triangoli equivalenti a quello colorato in grigio, anche solo per metà del Tangram, e vedere che l'intera figura può essere scomposta il 16 (8x2) triangoli equivalenti. L'opzione A corrisponde al conteggio di tutti i pezzi del Tangram senza tener conto dell'equivalenza fra le parti, mentre l'opzione C corrisponde al conteggio di tutti i triangoli equivalenti a quello grigio, che però non viene considerato nel conteggio. L'errore quindi non è sul concetto di equivalenza fra le parti come nel caso precedente, ma nel significato di rapporto fra la parte e il tutto. L'opzione B corrisponde a chi considera solo metà del Tangram.

Item	Manc Risp	Opzioni A	B	C	D
D25	3,4	35,3	8,0	11,3	42,0

Macro processo: Utilizzare

Figura 3. Guida alla lettura (https://invalsi-areaprove.cineca.it/).

In Figura 4 sono riportati alcuni esempi di suddivisioni della figura prodotte dagli studenti e raccolte dai ricercatori (Branchetti et al., 2015).

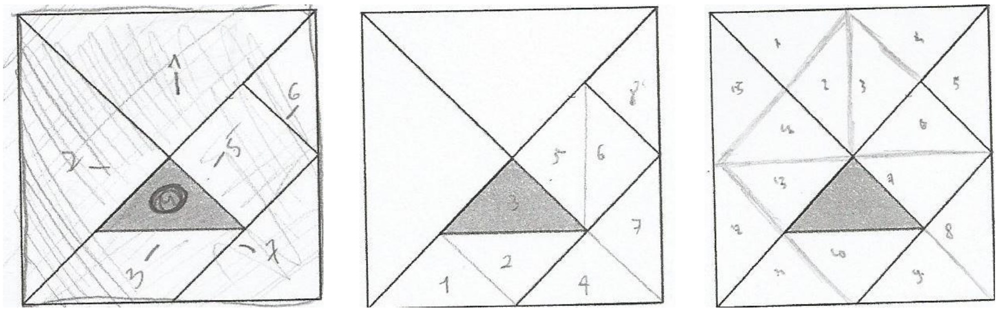


Figura 4. Esempi, tratti dalle prove, che mostrano come alcuni studenti abbiano individuato i pezzi da considerare per rispondere al quesito: a sinistra esempio in relazione alla scelta dell'opzione A, al centro in relazione alla scelta dell'opzione B e a destra in relazione alla scelta dell'opzione C.

Lo studente che sceglie l'opzione A potrebbe aver solo contato il numero di pezzi in cui è già suddivisa la figura (Figura 4, a sinistra), non rispondendo alla richiesta di individuare a quale frazione dell'area del Tangram corrisponde il pezzo colorato in grigio. Questa scelta identifica una misconcezione legata all'idea di frazione come parte di un tutto: in questo caso si identificano solo i pezzi che già compongono il Tangram, non considerando il rapporto tra l'area di ciascun singolo pezzo e l'area del Tangram. Notiamo che questa opzione è stata scelta dal 35,3% del campione e quindi da una percentuale molto alta di studenti (basti notare che la risposta corretta è stata scelta dal 42% del campione). Le opzioni B e C sono scelte da meno studenti: quelli che considerano solamente una parte del Tangram dividendo solo metà del Tangram (Figura 4, al centro) o, pur suddividendo correttamente tutto Tangram, non contano il pezzo grigio (Figura 4, a destra). Questi errori potrebbero anche essere influenzati da difficoltà legate alla conversione dal registro[7] verbale (ad esempio "frazione di", " un sedicesimo", etc.) a registri grafici o viceversa.

La riflessione sulle possibili motivazioni delle scelte errate ha portato alla discussione sui differenti modi di comprendere il concetto di frazione, come ad esempio: considerare la frazione come parte di un "uno-tutto", come quoziente, come rapporto, come operatore, come misura o punto su una retta orientata (Fandiño Pinilla, 2007).

Il passo successivo delle attività di formazione è consistito nello sviluppo di analisi a priori svolte dagli insegnanti in piccolo gruppo. Il docente formatore ha proposto una struttura comune per l'analisi a priori del quesito che proponeva diversi punti per focalizzare l'attenzione su aspetti istituzionali, epistemologici, cognitivi e didattici[8]:

- competenze richieste e collegamenti con le Indicazioni Nazionali;
- possibili strategie risolutive e potenziali errori e difficoltà;
- punti di forza e critici del compito o del testo;
- proposte di variazioni del compito o del testo.

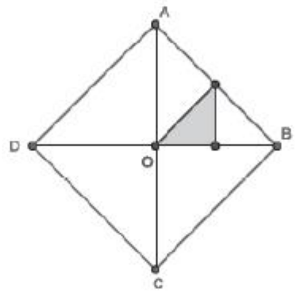
Gli insegnanti hanno analizzato il quesito D2 del livello 6 (Figura 5) che, secondo lo studio condotto dal gruppo di ricerca, era collegabile al quesito precedente per contenuti e possibili schemi risolutivi.

In questo caso non si richiede di individuare la frazione dell'area come in D25, ma lo schema risolutivo può essere simile, ossia la scomposizione di un quadrato in triangoli congruenti a un triangolo dato. I risultati statistici in questo caso non potevano fornire informazioni sugli errori degli studenti perché si tratta di un quesito a risposta aperta e quindi le percentuali si riferiscono solo agli studenti che avevano risposto in modo corretto, errato o non avevano risposto: 55,3% corrette; 40,2% errate; 4,5% mancanti. Il gruppo di studenti con performance più basse nella prova, ha avuto circa il 10% di probabilità di rispondere correttamente.

[7] Gli oggetti matematici sono per loro natura astratti ed emergono dal coordinamento di diversi registri di rappresentazione o di diverse rappresentazioni nello stesso registro (Duval, 1993; 2008).

[8] Questo tipo di struttura di analisi è stata elaborata dall'autore.

Nel quadrato ABCD sono stati uniti i punti medi del lato AB e del segmento OB.



Con quanti triangoli come quello colorato in grigio si riesce a ricoprire esattamente la superficie del quadrato ABCD?

Risposta: ………………………

Figura 5. Quesito D2, livello 6 (Invalsi, 2011).

Nel paragrafo successivo mostreremo alcune previsioni di strategie risolutive (sia corrette, sia errate) per il quesito D2 scritte e condivise dagli insegnanti sulla piattaforma e-learning del corso. Gli insegnanti in servizio hanno molta più esperienza nel predire possibili comportamenti degli studenti, ma anche gli insegnanti in formazione possono immaginare diverse strategie risolutive e quindi prevedere i possibili errori.

3.2. Le analisi degli insegnanti: possibili strategie risolutive e difficoltà

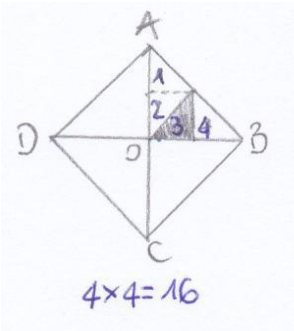
In questo articolo ci concentreremo sulla parte dell'analisi a priori riguardante lo studio delle strategie risolutive: agli insegnanti è stato richiesto di riflettere sul possibile comportamento degli studenti, cercando di prevedere il maggior numero di strategie risolutive con i relativi eventuali errori[9]. Nel corso di formazione si è voluta sfruttare l'opportunità di poter condividere riflessioni e di discutere con colleghi e ricercatori sulla molteplicità delle possibili strategie risolutive degli studenti e quindi sulla genesi e motivazione dei possibili errori. Quando in futuro questi insegnanti proporranno problemi simili potranno sfruttare tutte le interpretazioni sviluppate e condivise nella community of inquiry formata durante il corso: saranno quindi probabilmente più preparati nell'analisi delle riposte degli studenti e saranno in grado di promuovere diversi schemi risolutivi discutendone le potenzialità e i limiti.

Gli elaborati che analizzeremo in questo paragrafo provengono dal corso TFA dell'a.a. 2014/15 che è stato frequentato da 25 insegnanti in formazione. Nella Figura 6 sono

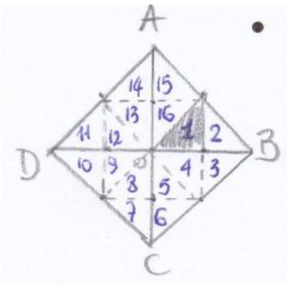
---

[9] La scelta di presentare in questo articolo la parte relativa all'analisi delle strategie risolutive è dovuta al fatto che sia l'individuazione delle competenze necessarie per rispondere a un quesito in relazione ai traguardi definiti nelle Indicazioni Nazionali (2012), sia l'analisi di testi di problemi, non sono consegne innovative per un corso di formazione e dovrebbero essere svolte usualmente dagli insegnanti nella loro pratica didattica.

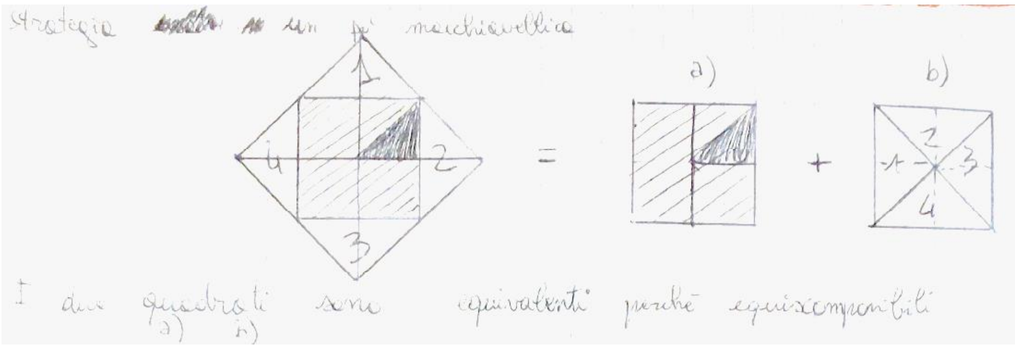
riportati alcuni estratti dalle analisi degli insegnanti riguardanti alcune possibili strategie risolutive corrette. Gli insegnanti hanno lavorato in piccoli gruppi.



"Scomporre il triangolo AOB in quattro triangoli congruenti al triangolo grigio. Riconoscere che nei restanti tre triangoli rettangoli AOD, DOC e COB si può effettuare la stessa divisione. Moltiplicare dunque i quattro triangoli congruenti al triangolo grigio per i quattro triangoli 'grandi' in cui è stato diviso, dalle diagonali, il quadrato dato. Dunque 4 x 4 = 16. Sono stati utilizzati i seguenti contenuti: (i) simmetria; (ii) congruenza di triangoli; (iii) scomposizione di figure".



"Individuare i punti medi dei lati del quadrato e i punti medi dei quattro segmenti di diagonale. Unire i punti medi, nel modo presentato per il triangolo grigio, e quindi scomporre tutta la figura in triangoli rettangoli congruenti. Contare tutti i 16 triangoli ottenuti. In questa strategia si riscontrano i seguenti contenuti: (i) concetto di punto medio; (ii) scomposizione di figure".



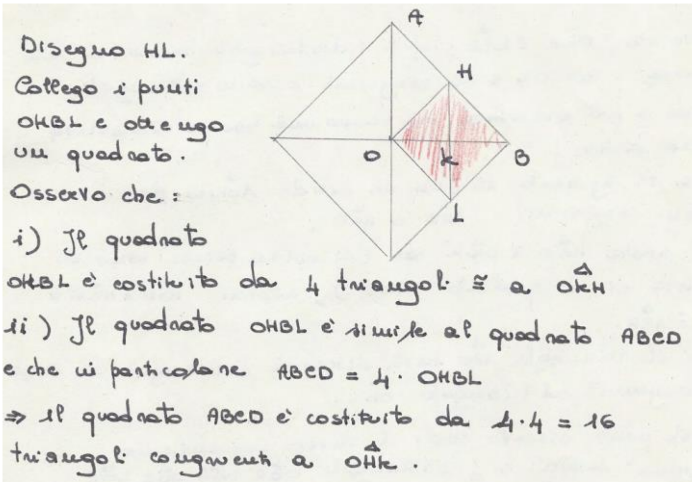
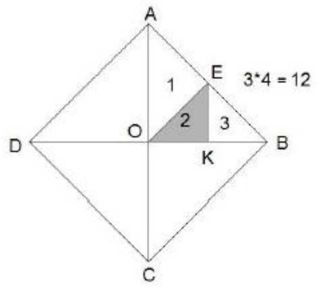


Figura 6. Possibili strategie risolutive del quesito D2 scritte dagli insegnanti.

Gli insegnanti hanno poi cercato di prevedere possibili errori degli studenti (Figura 7 e Figura 8).

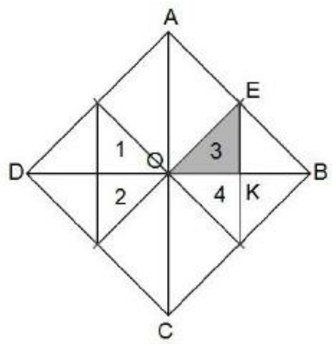
Errore: moltiplicano i 3 triangoli in AOB per 4.

Risposta errata: 12



Suddividono parzialmente il quadrato ABCD, colorando la "farfalla" e limitandosi a contare esclusivamente i triangoli da essa individuati.

Risposta errata: 4



Difficoltà: interpretano male il quesito.

Risposta errata: 15

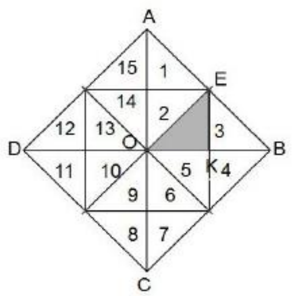
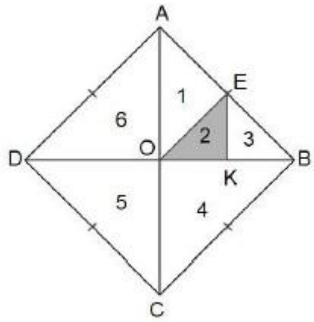


Figura 7. Possibili strategie risolutive errate che sono state immaginate e scritte dagli insegnanti.

Contano passivamente i triangoli già presenti nel disegno fornito nel quesito.
Risposta errata: 6



Difficoltà: riescono a scomporre parzialmente il quadrato ABCD.
Risposta errata: 8

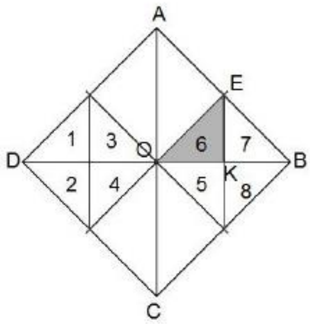


Figura 8. Ulteriori possibili strategie risolutive errate
che sono state immaginate e scritte dagli insegnanti.

Durante la discussione collettiva di questi elaborati, il docente formatore ha presentato anche alcune risposte date dagli studenti (Figura 9) e le percentuali di risposta (Figura 10) individuate in un campione analizzato dal gruppo di ricerca (Branchetti et al., 2015) per confrontarli con le ipotesi fatte dagli insegnanti.

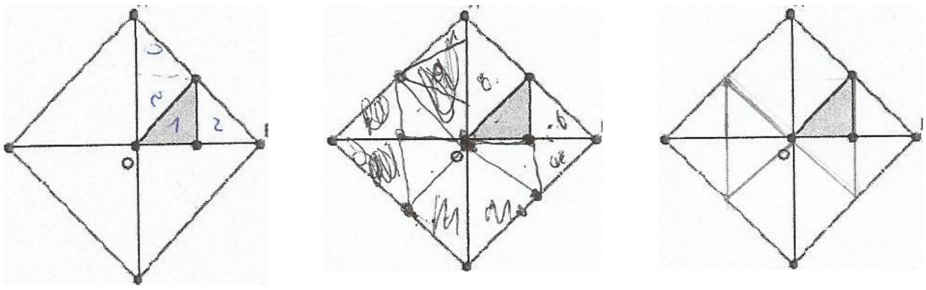


Figura 9. Esempi di suddivisioni della figura prodotte dagli studenti.

Risposta	16	12	8	4	3	Altro	Mancanti
Percentuale	52,7%	10,8%	5,4%	6,8%	4,1%	6,8%	13,4%

Figura 10. Percentuali di risposta su un sotto-campione di 74 prove del campione nazionale.

Come si può notare confrontando le Figure 7 e 8 con le Figure 9 e 10, molte delle previsioni fatte dagli insegnanti potrebbero spiegare i dati raccolti nel sotto-campione analizzato dai ricercatori. Analogamente a quello osservato per gli errori identificati nelle scelte delle opzioni di risposta del quesito D25 del livello 8, anche le difficoltà degli studenti nel quesito D2 possono essere legate alla suddivisione della figura: gli studenti considerano triangoli non congruenti a quello grigio (rispondono 12 o 6 in D2 e “un settimo” in D25), o non considerano il triangolo grigio nel conteggio (rispondono 15 in entrambi i quesiti) o considerano solo parte della figura (rispondono 8 o 4 in D2 e “un ottavo” in D25). Ci sono anche combinazioni di questi errori come nel caso degli studenti che rispondono 3: una possibile spiegazione potrebbe essere che considerano solo parte della figura e contano triangoli anche non congruenti a quello grigio.

Questo tipo di analisi può essere un buon punto di partenza per gli insegnanti per la progettazione di percorsi didattici che tengano conto dei risultati delle prove nazionali e anche delle possibili difficoltà legate a specifici compiti, come ad esempio la scomposizione di figure piane e l’individuazione di rapporti tra aree. Queste difficoltà sono ben documentate in letteratura: per dare una panoramica più ampia sulle difficoltà riguardanti le frazioni, oltre agli studi già citati, sono stati usati anche estratti dall’“Encyclopedia of mathematics education” (Lerman, 2014)[10].

Svolgere l’analisi a priori, avendo presenti i risultati della ricerca riguardo alle difficoltà legate all’insegnamento-apprendimento di specifici contenuti, e prevedere la possibile molteplicità delle strategie risolutive dei propri studenti, può essere la base per lo sviluppo di attività didattiche, non necessariamente legate ai quesiti Invalsi, che focalizzano l’attenzione non solo sul prodotto finale di un’attività di problem solving, ma soprattutto sul processo che ha portato a una certa soluzione.

4. Conclusioni

In questo articolo è stata presentata un’attività laboratoriale svolta in un programma di formazione per insegnanti di scuola secondaria di primo grado. Nella descrizione e analisi delle consegne affrontate dagli insegnanti si possono trovare le risposte alle domande poste nell’introduzione di questo articolo: è stato, infatti, mostrato come si possano usare le prove Invalsi e i loro risultati per sviluppare attività di formazione e come gli insegnanti e il docente formatore abbiano condiviso pratiche e riflessioni teoriche riguardanti l’analisi a priori di alcuni quesiti selezionati dalle prove Invalsi di matematica. Seguendo una metodologia di tipo laboratoriale, gli insegnanti hanno affrontato diversi compiti condividendo lenti teoriche e materiali, confrontandosi tra pari e con esperti. Nel caso specifico delle prove standardizzate è stato importante fornire agli insegnanti degli strumenti per analizzarle che non si riducono a considerarne solamente i risultati statistici.

[10] Tutti gli articoli di ricerca citati (o traduzioni di parti di essi) sono stati condivisi sulla piattaforma del corso.

L'elemento di innovazione delle attività proposte consiste nella richiesta di svolgere, guidati da una struttura comune, un'analisi a priori dei quesiti che tenga conto degli aspetti istituzionali, epistemologici, cognitivi e didattici. Il tipo di analisi proposta potrebbe essere applicata ad altri tipi di problemi matematici, non solo quindi a quesiti tratti dalle prove Invalsi, perché focalizza l'attenzione sull'inquadramento delle richieste dei quesiti in relazione ai traguardi per lo sviluppo delle competenze e degli obiettivi di apprendimento sanciti dalle Indicazioni Nazionali per il primo ciclo di istruzione, e sull'analisi delle possibili strategie risolutive e delle difficoltà degli studenti. Nel caso delle prove Invalsi abbiamo mostrato come è stato possibile sviluppare un'analisi integrata di approcci quantitativi e qualitativi: i risultati statistici hanno dato informazioni sul comportamento degli studenti che sono state poi elaborate con lenti teoriche provenienti da ricerche in didattica della matematica e con riflessioni nate all'interno della community of inquiry (Jaworski, 2003) formata nel corso di formazione. Attraverso un processo di trasposizione meta-didattica (Aldon et al., 2013), gli insegnanti e il docente formatore hanno condiviso e sviluppato le loro conoscenze. Il risultato di questo processo è la formazione di una conoscenza condivisa di teorie e pratiche composta da elementi di matematica, didattica e pedagogia (Jaworski, 2008).

Da un punto di vista della ricerca sulla formazione degli insegnanti, questo tipo di attività ha permesso la messa in luce di aspetti che sono al centro di molti lavori presenti in letteratura sullo studio delle conoscenze specifiche per l'insegnamento. Usando il costrutto elaborato da Shulman (1986), possiamo dire che, per affrontare i compiti descritti in questo articolo, gli insegnanti utilizzano la conoscenza della disciplina insieme alla Pedagogical Content Knowledge[11]. L'analisi a priori svolta dagli insegnanti, infatti, è generata da riflessioni e discussioni sui contenuti matematici coinvolti, sui traguardi per lo sviluppo delle competenze e degli obiettivi di apprendimento sanciti dalle Indicazioni Nazionali, e sulle possibili risposte degli studenti. Gestire l'intreccio tra la conoscenza dei contenuti matematici, la conoscenza pedagogica dei contenuti e del curriculum è qualcosa di tipico del lavoro di un insegnante.

Ball e colleghi (2008) hanno affinato il costrutto di Shulman, sostenendo l'esistenza, all'interno della conoscenza della disciplina, di una conoscenza specialistica dell'insegnante (Specialized Content Knowledge): "the Mathematical knowledge and skills unique to teaching"[12] (ivi, p. 400). Gli insegnanti devono interpretare i processi risolutivi dei loro studenti, padroneggiando la materia e individuando difficoltà ed errori possibili nello svolgere un determinato compito. Questa è un'attività di problem solving fondamentale nel lavoro di un insegnante e che richiede la conoscenza della disciplina[13].

---

[11] Con Pedagogical Content Knowledge si intende "the particular form of content knowledge that embodies the aspects of content most germane to its teachability" (Shulman, 1986, p. 9), ossia quella particolare forma di conoscenza del contenuto che incorpora gli aspetti del contenuto stesso che riguardano principalmente il suo apprendimento e la sua comprensibilità (trad. mia). Shulman (ibidem) porta alcuni esempi in cui è necessaria questa conoscenza: saper scegliere le rappresentazioni e le formulazioni più adatte per rendere un concetto comprensibile ad altri, oppure sapere cosa può rendere uno specifico argomento facile o difficile per studenti di diverse età e provenienti da differenti percorsi scolastici, etc.

[12] "Le conoscenze e abilità matematiche specifiche per l'insegnamento" (trad. mia).

[13] Ball e colleghi (Ball et al., 2008) scrivono: "For instance, deciding whether a method or procedure would work in general requires mathematical knowledge and skill, not knowledge of students or teaching. It is a form of mathematical problem solving used in the work of teaching" (ivi, p. 398) - "Per esempio, decidere se un metodo o una procedura potrebbero funzionare in generale richiede

Una delle critiche mosse alla definizione di Specialized Content Knowledge è la difficoltà di identificare degli esempi che effettivamente la caratterizzino (Flores, Escudero & Carrillo, 2013). Le attività presentate in questo articolo, in cui si richiede agli insegnanti di immaginare tante diverse strategie risolutive di un problema matematico esplicitando tutti i possibili passaggi che portano a un determinato risultato, di confrontare processi diversi che producono risultati simili e di interpretare dei risultati non corretti individuando i possibili motivi degli errori, possono essere considerate attività che richiedono principalmente la conoscenza della disciplina, ma che sono anche specifiche della professione dell'insegnante.

Le conoscenze dei contenuti della disciplina sono sicuramente centrali nell'insegnamento-apprendimento della matematica, ma, come già sottolineato da Shulman (1986), per un insegnante la conoscenza dei contenuti si intreccia con le conoscenze pedagogiche che sono fondamentali nella progettazione, sviluppo e valutazione delle attività in classe. In questo articolo non c'era lo spazio per trattare anche questa parte, ma gli insegnanti coinvolti nei corsi di formazione hanno successivamente progettato e sviluppato delle sperimentazioni nelle loro classi proponendo i quesiti discussi durante il corso e raccogliendo i protocolli degli studenti. Questi materiali sono ora oggetto di studio e saranno utilizzati per sviluppare ulteriori ricerche e percorsi formativi nel campo della formazione degli insegnanti.

Bibliografia

Aldon, G., Arzarello, F., Cusi, A., Garuti, R., Martignone, F., Robutti, O., …Soury-Lavergne, S. (2013). The meta-didactical transposition: a model for analysing teachers education programs. In A.M. Lindmeier & A. Heinze (eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 97-124). Kiel: PME.

Arzarello, F., & Bartolini Bussi, M.G. (1998). Italian trends in research in mathematics education: a national case study in the international perspective. In J. Kilpatrick & A. Sierpinska (eds.), *Mathematics education as a research domain: a search for identity* (pp. 197-212). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Ball, D.L., Thames, M.H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special?. *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389–407.

Bartolini Bussi, M.G., & Mariotti, M.A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. English (ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed.) (pp. 746-783). New York, NY: Routledge.

Bartolini Bussi, M.G., & Martignone, F. (2013). Cultural issues in the communication of research on mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, *33*(1), 2–8.

Branchetti, L., Ferretti, F, Lemmo, L., Maffia, A., Martignone, F., Matteucci, M., & Mignani, F. (2015). A longitudinal analysis of the Italian national standardized mathematics tests. *Proceedings of the 9th Conference of European Research in Mathematics Education* (pp. 1695-1701). Prague: ERME.

conoscenze e abilità matematiche, non la conoscenza degli studenti o dell'insegnamento. È una forma di problem solving matematico usata nell'attività d'insegnamento" (trad. mia).

Decreto Legislativo 19 novembre 2004, n. 286. *Istituzione del Servizio Nazionale di Valutazione del sistema educativo di istruzione e di formazione, nonché riordino dell'omonimo istituto, a norma degli articoli 1 e 3 della legge 28 marzo 2003, n. 53.*

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *5*, 37–65.

Duval, R. (2008). Eight problems for a semiotic approach in mathematics education. In L. Radford, G. Schubring & F. Seeger (eds.), *Semiotics in mathematics education* (pp. 39-61). Rotterdam: Sense Publishers.

Fandiño Pinilla, M.I. (2007). Fractions: conceptual and didactic aspects. *Acta Didactica Universitatis Comenianae*, *7*, 23–45.

Flores, E., Escudero, D., & Carrillo, J. (2013). A theoretical review of Specialized Content Knowledge. In B. Ubuz, C. Haser & M.A. Mariotti (eds.), *Proceedings of the 8th Conference of European Research in Mathematics Education* (pp. 3055-3064). Ankara: ERME.

Gestinv 2.0. Archivio interattivo delle prove Invalsi. http://www.gestinv.it (ver. 15.04.2016).

Indire. Istituto Nazionale di Documentazione Innovazione e Ricerca Educativa. http://nuovilicei.indire.it (ver. 15.04.2016).

Indire. Istituto Nazionale di Documentazione Innovazione e Ricerca Educativa. http://nuovitecnici.indire.it/ (ver. 15.04.2016).

Indire. Istituto Nazionale di Documentazione Innovazione e Ricerca Educativa. http://nuoviprofessionali.indire.it/ (ver. 15.04.2016).

Invalsi. Istituto Nazionale per la Valutazione del Sistema educativo di Istruzione e di formazione http://www.invalsi.it/invalsi/istituto.php?page=chisiamo (ver. 15.04.2016).

Invalsi. Istituto Nazionale per la Valutazione del Sistema educativo di Istruzione e di formazione. *Procedure selettive per concorso di idee*. http://www.invalsi.it/invalsi/concorsi.php?page=procedure_concidee_att (ver. 15.04.2016).

Invalsi. Istituto Nazionale per la Valutazione del Sistema educativo di Istruzione e di formazione. *Area rilevazioni nazionali e internazionali*. https://invalsi-areaprove.cineca.it (ver. 15.04.2016).

Jaworski, B. (2003). Research practice into/influencing mathematics teaching and learning development: towards a theoretical framework based on co-learning partnerships. *Educational Studies in Mathematics*, *54*, 249–282.

Jaworski, B. (2008). Development of the mathematics teacher educator and its relation to teaching development. In B. Jaworski & T. Wood (eds.), *International handbook of mathematics teacher education* (pp. 335-361). Rotterdam: Sense Publishers.

Jaworski, B., & Huang, U.R. (2014). Teachers and didacticians: key stakeholders in the processes of developing mathematics teaching. *ZDM-The International Journal of Mathematics Education*, *46*(2), 173–188.

Krainer, K. (2011). Teachers as stakeholders in mathematics education research. In B. Ubuz (ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 47-62). Ankara: PME.

Lazarsfeld, P.F., & Henry, N.W. (1968). *Latent structure analysis*. Boston, MA: Houghton Mifflin.

Lerman, S. (ed.). (2014). *Encyclopedia of mathematics education*. Dordrecht: Springer Netherlands.

Martignone, F. (2015). A development over time of the researchers' meta-didactical praxeologies. *Proceedings of the 9th Conference of European Research in Mathematics Education* (pp. 2867-2873). Prague: ERME.

MIUR. Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca (2009). *Direttiva annuale 6 agosto 2009, n. 76.* http://www.invalsi.it/snv0910/documenti/direttiva_76.pdf (ver. 15.04.2016)

MIUR. Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca (2010). *Decreto 10 settembre 2010, n. 249. Regolamento concernente: "Definizione della disciplina dei requisiti e delle modalità della formazione iniziale degli insegnanti della scuola dell'infanzia, della scuola primaria e della scuola secondaria di primo e secondo grado, ai sensi dell'articolo 2, comma 416, della legge 24 dicembre 2007, n. 244".*

MIUR. Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca (2012). Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione. *Annali della Pubblica Istruzione.* No. Speciale.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4–14.

Trinchero, R. (2014). Il Servizio Nazionale di Valutazione e le prove Invalsi. Stato dell'arte e proposte per una valutazione come agente di cambiamento. *Form@re-Open Journal per la Formazione in Rete*, *4*(14), 34–49. http://dx.doi.org/10.13128/formare-15794 (ver. 15.04.2016).

Van der Linden, W.J., & Hambleton, R.K. (1997). *Handbook of modern item response theory*. New York, NY: Springer.

Vergnaud, G. (2009). The theory of conceptual fields. *Human Development*, *52*(2), 83–94.

Vygotskij, L.S. (1978). *Mind in society: the development of higher psychological processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Wells, G. (1999). *Dialogic inquiry: toward a sociocultural practice and theory of education.* Cambridge: Cambridge University Press.