

La didattica della matematica e gli apprendimenti: un contributo a partire dai dati Invalsi

Mathematics teaching and learning: a paper starting from Invalsi data

Monica Amici^a, Giuseppina Le Rose^b, Veronica Riccardi^{c,1}

^a Invalsi, monica.amici@invalsi.it

^b Invalsi, giuseppina.lerose@invalsi.it

^c Invalsi, veronica.riccardi@invalsi.it

Abstract

La finalità principale del presente lavoro è di illustrare alcune caratteristiche delle pratiche didattiche del primo e del secondo ciclo di istruzione, utilizzando alcuni nuovi dati forniti da Invalsi sulle attività quotidiane degli insegnanti. Unendo queste informazioni con i punteggi ottenuti dagli studenti nel test Invalsi, si vogliono approfondire i risultati ottenuti dagli studenti in matematica partendo da una nuova prospettiva, interna al sistema di educazione.

Parole chiave: didattica della matematica; valutazione degli apprendimenti; Indicazioni nazionali per il curriculum.

Abstract

This paper illustrates the main teaching practices features in the Italian primary and secondary school, by using new data, provided by Invalsi, about teachers' daily activities. We merge such information with the scores achieved by the students in the Invalsi test. Our study reframes the cognitive test results in mathematics from a new bottom-up perspective, that is internal to the educational system.

Keywords: mathematics education; evaluation of learning; Italian teaching curriculum guidelines.

¹Un sincero ringraziamento alle professoresse Rossella Garuti e Aurelia Orlandoni per averci aiutato con disponibilità e professionalità e a tutti gli insegnanti che hanno partecipato all'indagine.

Le opinioni espresse nei lavori sono attribuibili esclusivamente agli autori e non impegnano in alcun modo la responsabilità dell'Istituto. Nel citare i temi, non è, pertanto, corretto attribuire le argomentazioni ivi espresse all'Invalsi o ai suoi Vertici.

1. Introduzione

Il presente contributo prende avvio dal “Questionario insegnanti Invalsi” (<http://www.invalsi.it/Invalsi/ri/sis/questins.php>): uno strumento di ricerca rivolto agli insegnanti di italiano e di matematica di tutte le classi campione che hanno partecipato alle rilevazioni nazionali 2013-2014². Nel questionario, finalizzato a conoscere l’atteggiamento degli insegnanti nei confronti delle rilevazioni nazionali e a individuare gli aspetti di forza e di criticità relativi al contesto scolastico che incidono sulle performance degli studenti, sono state inserite alcune domande sulle strategie didattiche adottate dagli insegnanti di italiano e matematica in classe per insegnare le competenze fondamentali di entrambe le discipline.

L’obiettivo principale del presente lavoro è quello di mettere in relazione le risposte che i docenti di matematica hanno fornito alle domande del “Questionario insegnanti Invalsi” sulla didattica con gli esiti alle rilevazioni nazionali dei loro studenti. La scelta di prendere in esame il solo questionario rivolto agli insegnanti di matematica è dovuta al fatto che la relazione fra le domande poste nel questionario e le domande di tipo cognitivo poste agli studenti nella rilevazione nazionale Invalsi è più immediata rispetto alla prova di italiano che è strettamente legata alla comprensione del testo (*reading*). Inoltre la prova Invalsi di matematica è strettamente connessa alle “Indicazioni nazionali per il curricolo” (MIUR, 2012) del primo ciclo e alle “Linee guida del secondo ciclo” e questo consente alla prova stessa di testare abilità diverse in tutti e quattro gli ambiti definiti dalle “Indicazioni nazionali” (numeri, spazio e figure, relazioni e funzioni, dati e previsioni)³.

La didattica della matematica è uno stimolante terreno sul quale il dibattito teorico degli esperti e l’operato quotidiano degli insegnanti sta diventando sempre più vivo e ricco, dando vita a numerosi gruppi di ricerca teorico-metodologica⁴. Inoltre, l’educazione matematica fornisce un contributo fondamentale nella formazione dei giovani: la competenza in matematica è considerata, difatti, come una delle abilità chiave per la realizzazione personale, la cittadinanza attiva, l’inclusione sociale e l’educazione permanente nella società della conoscenza sia in ambito internazionale sia nazionale (EC, 2011).

L’apprendimento della matematica non è un processo univoco ma si presenta come un fattore multiplo, ricco di molteplici aspetti: non basta aver costruito un concetto, occorre saperlo usare per effettuare calcoli o dare risposta agli esercizi, combinarlo con altri e con strategie opportune per risolvere problemi, occorre saper spiegare il concetto costruito e la strategia seguita. L’apprendimento della matematica si compone, difatti, di varie tipologie di apprendimenti tra loro distinti e complementari (Fandiño Pinilla, 2014):

- apprendimento concettuale;
- apprendimento algoritmico (calcolare, operare, etc.);
- apprendimento delle strategie (risolvere, congetturare, etc.);
- apprendimento comunicativo (dire, argomentare, validare, dimostrare, etc.);

² Il “Questionario insegnanti” 2013-2014 era stato somministrato con alcune varianti negli anni scolastici 2011-2012 e 2012-2013.

³ Per maggiori informazioni si vedano i “Quadri di riferimento” delle prove Invalsi di matematica (https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/autori/QdR_Mat_I_ciclo.pdf; https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/QdR_Mat_II_ciclo.pdf).

⁴ Per il dibattito sulla didattica della matematica si veda <http://www.airdm.org/>.

- apprendimento e gestione delle trasformazioni semiotiche (riconoscere, scegliere, usare e gestire diversi registri semiotici nei quali esprimere le proprie conoscenze e competenze matematiche).

L'impegno dell'insegnante deve essere quello di condurre un'analisi fine e specifica degli apprendimenti, trattandoli sia in maniera indipendente, sia nel loro intreccio. Per essere buoni insegnanti di matematica non è, dunque, solo necessario apprendere la disciplina: bisogna saper trasporre, essere cioè in grado di trasformare il sapere in oggetto di insegnamento, in funzione del pubblico e delle finalità didattiche che ci si pone. Lo sforzo del didatta della matematica è quello di trasformare discorsi specialistici della matematica in argomenti comprensibili per gli allievi, consoni alla loro specificità (Monaco, 2014).

2. Didattica della matematica e valutazione degli apprendimenti

Negli ultimi decenni, la didattica della matematica è diventata un settore molto interessante su cui si focalizzano numerose ricerche in ambito internazionale e nazionale. Anche se con livelli diversi di sistematicità, le speculazioni sui modi di apprendere la matematica, le indicazioni e gli esempi relativi ai modi di organizzare e trasmettere le conoscenze matematiche sono, com'è noto, molto antichi (Platone, Euclide, etc.), solo in tempi più recenti la riflessione sui modi di insegnare e apprendere la matematica ha assunto uno statuto diverso. Queste ricerche hanno una ricaduta sul sistema educativo nazionale perché in vari modi coinvolgono il lavoro quotidiano dei docenti e sempre più spesso sono inserite in progetti coordinati e sviluppati in collaborazione con diversi enti (Bartolini Bussi, 2001).

I docenti, in particolare, sotto le sollecitazioni non solo della ricerca, ma anche della società e delle "Indicazioni nazionali" (MIUR, 2012), devono affrontare cambiamenti importanti perché a loro vengono richieste nuove competenze: di coordinatori, di progettisti didattici, di utilizzatori di nuove tecnologie. Tali competenze comprendono anche un nuovo modo di insegnare matematica, spesso sensibilmente diverso da quello utilizzato dai loro docenti quando erano studenti, e anche la capacità di confrontarsi con i risultati di test nazionali ed internazionali (Anichini, Arzarello, Ciarrapico & Robutti, 2004; Robutti, 2012). La valutazione degli apprendimenti rappresenta, difatti, un fronte impegnativo per le scuole e per i singoli docenti: essa richiede una forte assunzione di responsabilità nella scelta di modelli teorici coerenti, assetti metodologici rigorosi, strumenti validi e attendibili finalizzati alla rilevazione di conoscenze e competenze (Capperucci, 2011).

La competenza matematica viene indagata da diverse ricerche, sia internazionali (IEA TIMSS⁵, OCSE PISA⁶), sia nazionali (rilevazioni Invalsi). In ambito nazionale, le rilevazioni Invalsi coinvolgono le classi seconde e quinte della scuola primaria, la classe seconda della scuola secondaria di secondo grado e la classe terza della scuola secondaria di primo grado (Prova Nazionale). Naturalmente gli scopi e il disegno delle rilevazioni internazionali sono diversi da quelli delle rilevazioni nazionali e di conseguenza anche i

⁵L'indagine TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) promossa dalla IEA (International Association for the Evaluation of Educational Assessment) analizza il rendimento degli studenti in matematica e scienze in oltre 60 Paesi e viene condotta ogni quattro anni.

⁶ L'indagine PISA (Programme for International Student Assessment) promossa dall'OECD (Organization for Economic Co-operation and Development) ha l'obiettivo di misurare le competenze degli studenti in matematica, scienze, lettura e problem solving collaborativo.

quadri di riferimento presentano differenze notevoli, pur in una disciplina che apparentemente sembra “omogenea” anche a livello internazionale⁷. Le domande di matematica delle prove Invalsi sono costruite in relazione a due dimensioni: i contenuti matematici coinvolti, suddivisi in quattro ambiti (numeri, spazio e figure, relazioni e funzioni, dati e previsioni) e i processi coinvolti nella risoluzione:

1. conoscere e padroneggiare i contenuti specifici della matematica (oggetti matematici, proprietà, strutture, etc.);
2. conoscere e utilizzare algoritmi e procedure (ad esempio in ambito aritmetico, geometrico);
3. conoscere diverse forme di rappresentazione e passare da una all'altra (ad esempio verbale, numerica, simbolica, grafica);
4. risolvere problemi utilizzando strategie in ambiti diversi – numerico, geometrico, algebrico – (ad esempio individuare e collegare le informazioni utili, individuare e utilizzare procedure risolutive, confrontare strategie di soluzione, descrivere e rappresentare il procedimento risolutivo);
5. riconoscere in contesti diversi il carattere misurabile di oggetti e fenomeni, utilizzare strumenti di misura, misurare grandezze, stimare misure di grandezze (ad esempio individuare l'unità o lo strumento di misura più adatto in un dato contesto, stimare una misura);
6. acquisire progressivamente forme tipiche del pensiero matematico (ad esempio congetturare, argomentare, verificare, definire, generalizzare);
7. utilizzare strumenti, modelli e rappresentazioni nel trattamento quantitativo dell'informazione in ambito scientifico, tecnologico, economico e sociale (ad esempio descrivere un fenomeno in termini quantitativi, utilizzare modelli matematici per descrivere e interpretare situazioni e fenomeni, interpretare una descrizione di un fenomeno in termini quantitativi con strumenti statistici o funzioni);
8. riconoscere le forme nello spazio e utilizzarle per la risoluzione di problemi geometrici o di modellizzazione (ad esempio riconoscere forme in diverse rappresentazioni, individuare relazioni tra forme, immagini o rappresentazioni visive, visualizzare oggetti tridimensionali a partire da una rappresentazione bidimensionale e, viceversa, rappresentare sul piano una figura solida, saper cogliere le proprietà degli oggetti e le loro relative posizioni)⁸.

Ogni item proposto dall'Invalsi è dunque caratterizzato non solo dall'argomento che vuole indagare ma anche dal processo che lo studente deve attivare per risolverlo (Bolondi, 2013).

Le rilevazioni nazionali Invalsi di matematica sono un ottimo strumento sia per valutare gli studenti sia per riflettere sul tipo di didattica che viene svolta nelle nostre scuole. In fondo si tratta di una prova di autoverifica della distanza tra le attese che la società manifesta di avere per quanto concerne gli apprendimenti dei propri cittadini in formazione e quelli da essi realmente acquisiti. Per l'insegnante, dunque, questo è un banco di prova di notevole interesse per misurare le proprie scelte didattiche (Fandiño Pinilla, 2010).

⁷Per un confronto fra quadri di riferimento dell'indagine PISA 2012 e Invalsi con esempi di domande rilasciate si veda Arzarello, Garuti e Ricci (2015).

⁸ I “Quadri di riferimento” delle prove Invalsi sono tutti disponibili al seguente link <http://Invalsi-areaprove.cineca.it/>.

3. I dati e la metodologia

Il presente contributo, finalizzato a mettere in relazione le strategie didattiche degli insegnanti di matematica con gli esiti alle rilevazioni nazionali dei loro studenti, si basa sull'analisi congiunta di dati provenienti da due differenti strumenti di indagine. Da una parte viene analizzata una batteria di item proposta nell'edizione 2013-2014 del Questionario Insegnanti, finalizzata ad indagare le pratiche didattiche degli insegnanti, dall'altra vengono presi in considerazione i risultati in matematica delle rilevazioni nazionali Invalsi dello stesso anno scolastico per le classi quinte della scuola primaria, terze della scuola secondario di primo grado e seconde della scuola secondaria di secondo grado.

Il Questionario Insegnanti, la cui adesione è stata su base volontaria, è stato somministrato ai docenti delle classi campione per le rilevazioni nazionali Invalsi 2013-2014. Per quanto riguarda la classe quinta della scuola primaria, sono stati compilati 1.163 questionari, per la classe terza della scuola secondaria di primo grado 1.294 questionari e per la classe seconda della scuola secondaria di secondo grado 1.602 questionari. Nel rispetto dei vincoli di riservatezza, alle risposte fornite dagli insegnanti sono state collegate le percentuali di risposta corretta agli item che facevano parte delle prove cognitive Invalsi dello stesso anno scolastico.

Trattandosi di uno studio preliminare che potrebbe suggerire diverse piste di riflessione e di ricerca, si è deciso di effettuare, in questa prima fase, l'analisi del fenomeno a livello descrittivo, dando al lavoro un taglio prevalentemente qualitativo. La scelta dei quesiti del Questionario Insegnanti da collegare alle risposte delle prove cognitive è stata effettuata su base teorica prendendo come riferimento le "Indicazioni nazionali" e i "Quadri di riferimento" Invalsi.

La Figura 1 mostra la batteria M9 contenuta nel Questionario Insegnanti, di cui sono stati analizzati gli item M9a, M9d, M9e, M9g e M9h.

M9. Con quale frequenza Le capita di far svolgere in classe agli alunni le seguenti attività?				
<i>(Segnare una risposta per ogni riga.)</i>				
	Mai o quasi mai	Qualche volta	Spesso	Sempre o quasi sempre
a) Svolgere addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni e divisioni senza usare la calcolatrice -----	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
b) Utilizzare la calcolatrice in modo consapevole -----	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
c) Utilizzare la conoscenza delle proprietà di figure, rette e angoli per risolvere problemi -----	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
d) Interpretare i dati di tabelle, diagrammi o grafici -----	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
e) Scrivere relazioni fra numeri utilizzando lettere e rappresentazioni -----	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
f) Imparare a memoria proprietà, procedure e formule -----	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
g) Confrontare strategie di soluzione diverse di uno stesso problema -----	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
h) Spiegare le risposte date e/o i procedimenti seguiti -----	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
i) Affrontare situazioni problematiche aperte e non di routine ---	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Figura 1. Domanda (M9a) contenuta nel Questionario Insegnanti 2013-2014.

La Figura 2 mostra, invece, lo schema quesiti degli item delle prove cognitive (rilevazioni Invalsi 2014) presi in analisi e la corrispondenza con la domanda del Questionario Insegnanti.

Classi	Ambito	Processo	Item Invalsi	Domanda del Questionario Insegnanti
Quinta primaria	Numeri	Operazioni in N	D4	M9a
Quinta primaria	Numeri	Operazioni in N	D21	M9a
Quinta primaria	Dati e previsioni	Interpretare tabelle e grafici	D1	M9d
Quinta primaria	Dati e previsioni	Interpretare tabelle e grafici	D24b1	M9d
Terza secondaria di primo grado	Dati e previsioni	Confrontare strategie di soluzione	D15	M9g
Terza secondaria di primo grado	Numeri	Confrontare strategie di soluzione	D17a, D17b	M9g
Terza secondaria di primo grado	Numeri	Argomentare	D6	M9h
Terza secondaria di primo grado	Relazioni e funzioni	Argomentare	D14	M9h
Seconda secondaria di secondo grado	Numeri	Relazioni tra numeri	D15a, D15b, D15c, D15d	M9e
Seconda secondaria di secondo grado	Numeri	Relazioni tra numeri	D17	M9e
Seconda secondaria di secondo grado	Numeri	Argomentare	D6	M9h

Figura 2. Corrispondenza tra gli item delle prove Invalsi 2013-2014 e le domande del Questionario Insegnanti.

Lo schema sintetizza unicamente le relazioni fra le domande del Questionario Insegnanti e i quesiti delle prove cognitive che hanno portato a risultati ritenuti utili dal punto di vista dell'obiettivo del presente contributo. Non si è preso in considerazione la classe seconda della scuola primaria (livello 2) in quanto trattandosi dell'inizio della scuola primaria le strategie didattiche messe in atto dai docenti non sono ben consolidate e il collegamento con gli item della prova Invalsi risulta forzato. L'analisi dei quesiti sopra descritti è stata effettuata attraverso un'analisi di *cross tabulation* in cui sono state incrociate le risposte agli item sulla didattica del Questionario Insegnanti con la percentuale delle risposte corrette alle domande della prova cognitiva.

4. I risultati

4.1. Classe quinta primaria

Per quanto riguarda la classe quinta della scuola primaria, sono state prese in considerazione due domande relative all'ambito "numeri" e sono state messe in collegamento alla domanda M9a del Questionario Insegnanti ("Con quale frequenza Le capita di far svolgere in classe agli alunni addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni e divisioni senza usare la calcolatrice?").

D4. Osserva la seguente disuguaglianza:

$$1 < \blacktriangle < 2$$

Quale, tra i seguenti, è il numero che, messo al posto del triangolo, rende vera la disuguaglianza?

A. 0,12

B. 0,5

C. 1,7

D. 2,1

Figura 3. Domanda (D4) contenuta nella prova Invalsi 2013-2014 per la classe quinta primaria⁹.

D21. Quattro amici devono fare la seguente moltiplicazione:

$$120 \times 50$$

Per trovare il risultato ognuno fa il calcolo in modo diverso.

Vladimir	Giovanna	Giulio	Amal
$12 \times 5 \times 100$	$120 \times 5 \times 10$	$120 \times 5 + 120 \times 10$	$100 \times 50 + 20 \times 50$

Uno dei quattro ha fatto il calcolo in modo errato. Chi?

A. Vladimir

B. Giovanna

C. Giulio

D. Amal

Figura 4. Domanda (D21) contenuta nella prova Invalsi 2013-2014 per la classe quinta primaria¹⁰.

⁹http://www.invalsi.it/areaprove/documenti/strumenti/05_Matematica_Fasc_1_STAMPA.pdf

¹⁰http://www.invalsi.it/areaprove/documenti/strumenti/05_Matematica_Fasc_1_STAMPA.pdf

Il primo item (D4 in Figura 3) è piuttosto tradizionale mentre il secondo (D21 in Figura 4) riguarda un'attività più complessa per lo studente che, oltre a trovare il corretto risultato, deve capire quale dei quattro amici ha impostato il calcolo in modo errato.

La domanda del Questionario Insegnanti (M9a) introduce, invece, un tema abbastanza dibattuto nell'insegnamento nella scuola primaria: l'uso della calcolatrice ritenuto, da una parte, una risorsa e, dall'altra, un rischio per la corretta acquisizione di abilità significative per gli studenti come, ad esempio, il calcolo mentale, il senso del numero, l'applicazione delle proprietà delle operazioni. La calcolatrice è indubbiamente uno strumento utilizzato per fare i conti con velocità e sicurezza e, nella scuola primaria, può nascondere i processi di calcolo e i nodi concettuali che caratterizzano lo studio dell'aritmetica. Questo rischio può essere superato se la calcolatrice viene utilizzata con l'obiettivo di favorire esplorazioni ricche e significative, che consentano agli studenti di accrescere la propria esperienza numerica e di formarsi competenze stabili e consapevoli (Paola, 2012).

Dall'analisi dei risultati sembra esserci pochissima variabilità nei risultati degli studenti rispetto all'uso della calcolatrice in classe (Figura 5).

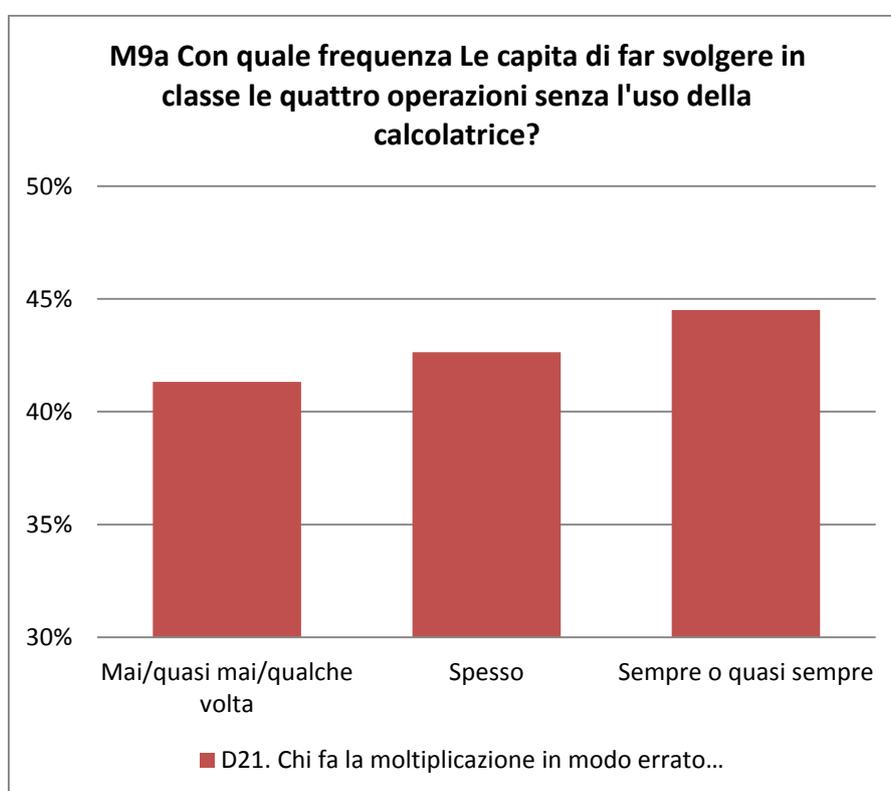


Figura 5. Relazione tra la domanda D21 della prova Invalsi 2013-2014 per la classe quinta primaria e la domanda M9a del Questionario Insegnanti.

L'altra tipologia di domande prese in esame per questo livello scolastico (quinta primaria) è relativa all'interpretazione di tabelle e grafici.

Sono state prese in esame due item non tipicamente scolastici (D1 in Figura 6 e D24b1 in Figura 7) e sono state messi in relazione con la domanda M9d del Questionario Insegnanti ("Con quale frequenza Le capita di far interpretare i dati di tabelle, diagrammi o grafici in classe agli alunni?").

D1. Alessandra vuole comprare un paio di collant (calze da donna). È alta 1,68 m e pesa 60 kg. Facendo riferimento alla seguente tabella, quale taglia di collant dovrà acquistare?

		PESO in chilogrammi - WEIGHT in kilograms															
		46	49	52	55	58	61	64	67	70	73	77	81	85	88	92	95
ALTEZZA in cm - HEIGHT in cm	150																
	153																
	156			2 = S													
	159																
	162					3 = M											
	165																
	168																
	171										4 = L						
	175																
	179																5 = XL
	183																

- A. Taglia 2 = S
 B. Taglia 3 = M
 C. Taglia 4 = L
 D. Taglia 5 = XL

Figura 6. Domanda (D1) contenuta nella prova Invalsi 2013-2014 per la classe quinta primaria¹¹.

¹¹http://www.invalsi.it/areaprove/documenti/strumenti/05_Matematica_Fasc_1_STAMPA.pdf

D24. Su tutte le uova che si acquistano al supermercato è impresso un codice come quello mostrato in figura.

LE UOVA E I SISTEMI DI ALLEVAMENTO

TIPO DI ALLEVAMENTO DELLE GALLINE
 0 = Produzione biologica
 1 = All'aperto
 2 = A terra
 3 = In gabbia



COMUNE DELL'ALLEVAMENTO

PROVINCIA DI APPARTENENZA

Facendo riferimento alla figura, rispondi alle seguenti domande.

a. Da quale tipo di allevamento delle galline proviene l'uovo in figura?

A. Produzione biologica

B. All'aperto

C. A terra

D. In gabbia

b. Quali informazioni si possono ricavare dall'etichettatura dell'uovo mostrato in figura e quali no? Metti una crocetta per ogni riga.

		Si può ricavare	Non si può ricavare
1.	Paese di produzione	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2.	Mezzo utilizzato per trasportare le uova	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3.	Comune dell'allevamento	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4.	Data di scadenza dell'uovo	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5.	Dimensioni dell'uovo	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Figura 7. Domanda (D24b1) contenuta nella prova Invalsi 2013-2014 per la classe quinta primaria¹².

Anche in questo caso, i risultati sembrano non dipendere dalle prassi dichiarate dai docenti. Si può osservare (Figura 8) che le tabelle da leggere e interpretare sono più legate a contesti di vita reale che non a contesti squisitamente scolastici, cosa di cui i docenti dovrebbero tener conto nelle loro pratiche didattiche.

Per quanto riguarda la scuola primaria, le differenze di pratiche didattiche dichiarate dai docenti sembrano non influenzare i risultati sia nel caso di domande su contenuti tradizionali (operazioni con i numeri naturali) sia nel caso di domande basate su contesti reali (leggere e interpretare tabelle). La questione potrebbe essere approfondita almeno secondo due ipotesi di ricerca: la prima relativa al fatto che le domande del Questionario Insegnanti possano non essere direttamente riconducibili alle domande della prova cognitiva di matematica e che, quindi, lo strumento di indagine potrebbe essere migliorato in tal senso; la seconda inerente a una possibile distanza tra quello che le domande della

¹²http://www.invalsi.it/areaprove/documenti/strumenti/05_Matematica_Fasc_1_STAMPA.pdf

prova cognitiva chiedono e la concreta pratica didattica che, nella scuola primaria, è ancora prevalentemente di tipo procedurale.

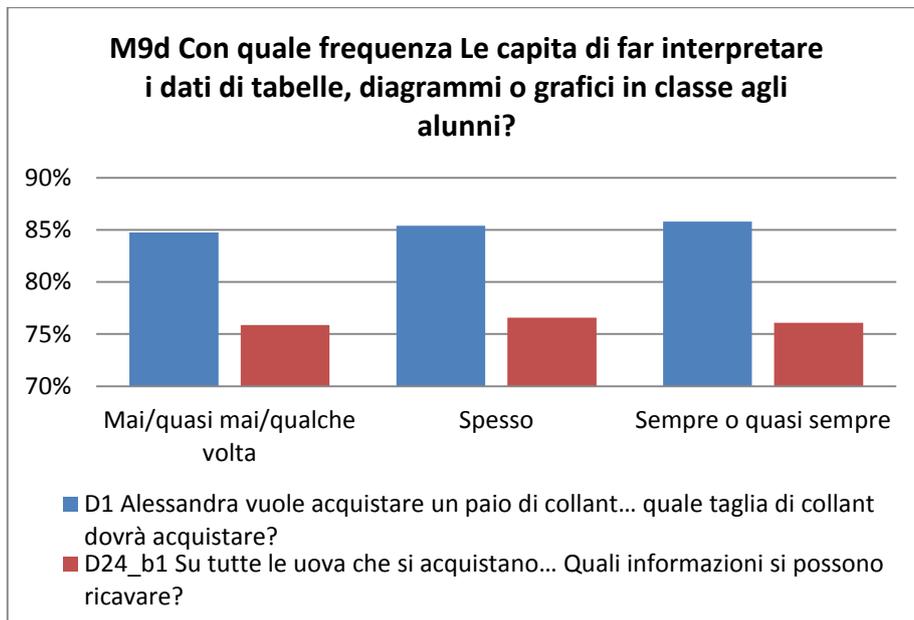


Figura 8. Relazione tra le domande D21 e D24b1 della prova Invalsi 2013-2014 per la classe quinta primaria e la domanda M9d del Questionario Insegnanti.

4.2. Classe terza secondaria di primo grado

Relativamente alla prova cognitiva della classe terza della scuola secondaria di primo grado (Prova Nazionale), le analisi sono state effettuate mettendo in relazione gli item D15 (Figura 9), D17a e D17b (Figura 10) della prova, riconducibili al processo di confronto di strategie diverse per la risoluzione dei problemi, con la domanda M9g del Questionario Insegnanti (“Con quale frequenza Le capita di far confrontare strategie di soluzione diverse di uno stesso problema in classe agli alunni?”).

D15. Una scuola ha dieci classi, con una media di 22 alunni per classe. Le classi con 21 alunni sono sei; le classi con 24 alunni sono tre. Quanti alunni ci sono nella decima classe?

A. 20

B. 22

C. 23

D. 25

Figura 9. Domanda (D15) contenuta nella prova Invalsi 2013-2014 per la classe terza della scuola secondaria di primo grado¹³.

¹³http://www.invalsi.it/areadati/Esami_Stato/2013-2014/strumenti/PN2014_Matematica_F01.pdf

D17. In Italia, secondo gli ultimi dati forniti dall'ISTAT, ci sono circa 600 automobili ogni 1000 abitanti. Gli abitanti dell'Italia sono circa 60 milioni e un'automobile è lunga mediamente 4 metri.

a. Immagina di posizionare tutte le automobili che ci sono in Italia una dietro l'altra, formando un'unica fila continua: quanti chilometri sarebbe all'incirca lunga questa fila?

A. Sarebbe all'incirca lunga come l'Italia (circa 1000 km)

B. Sarebbe all'incirca lunga come la distanza tra l'Italia e gli USA (circa 6000 km)

C. Sarebbe all'incirca lunga come l'equatore (circa 40000 km)

D. Sarebbe all'incirca lunga come il diametro del pianeta Giove (circa 143000 km)

b. Scrivi i calcoli che hai fatto per arrivare alla risposta.

.....

.....

.....

Figura 10. Domanda (D17) contenuta nella prova Invalsi 2013-2014 per la classe terza della scuola secondaria di primo grado¹⁴.

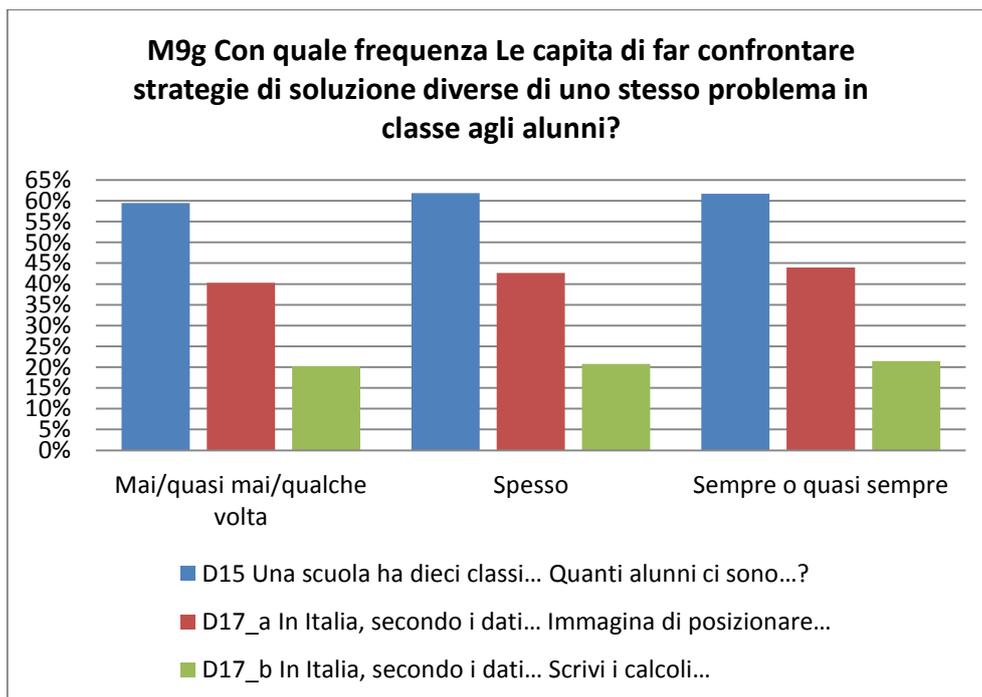


Figura 11. Relazione tra le domande D15 e D17a e D17b della prova Invalsi 2013-2014 per la classe terza della scuola secondaria di primo grado e la domanda M9g del Questionario Insegnanti.

¹⁴http://www.invalsi.it/areadati/Esami_Stato/2013-2014/strumenti/PN2014_Matematica_F01.pdf

Non emergono particolari differenze dall'analisi dei risultati (Figura 11): in questo caso bisogna interrogarsi sulla relazione fra item della prova cognitiva e domanda del Questionario Insegnanti. Infatti nei quesiti della prova Invalsi il processo cognitivo sotteso è la risoluzione di problemi, mentre la domanda del Questionario focalizza l'attenzione su un aspetto particolare della didattica: il confronto di strategie di soluzione, in genere non tanto frequentato nella prassi didattica.

D6. Considera il numero 15. Raddoppialo, poi raddoppia il risultato, poi continua a raddoppiare. In questo modo arrivi a trovare tutti i multipli di 15?

Scegli la risposta e completa la frase.

Sì, perché

.....

No, perché

.....

Figura 12. Domanda (D6) contenuta nella prova Invalsi 2013-2014 per la classe terza della scuola secondaria di primo grado¹⁵.

D14. La somma di due numeri naturali a e b è pari. Se aggiungo 1 a entrambi i numeri, come sarà ora la somma? Scegli una delle due risposte e completa la frase.

La somma sarà pari perché

.....

.....

La somma sarà dispari perché

.....

.....

Figura 13. Domanda (D14) contenuta nella prova Invalsi 2013-2014 per la classe terza della scuola secondaria di primo grado¹⁶.

Un aspetto interessante emerge invece per quanto riguarda le capacità relative agli aspetti argomentativi, al fornire spiegazioni sulle risposte date o sui procedimenti seguiti (processo 6 del Quadro di Riferimento). Su questo aspetto sono state messe in relazione gli item D6

¹⁵http://www.invalsi.it/areadati/Esami_Stato/2013-2014/strumenti/PN2014_Matematica_F01.pdf

¹⁶http://www.invalsi.it/areadati/Esami_Stato/2013-2014/strumenti/PN2014_Matematica_F01.pdf

(Figura 12) e D14 (Figura 13) della Prova Nazionale (livello 08, terza secondaria di primo grado) con la domanda M9h del Questionario Insegnanti (“Con quale frequenza Le capita di far spiegare le risposte date e/o i procedimenti seguiti in classe agli alunni?”).

Gli item presi in esame sono particolarmente importanti perché, oltre ad indicare la risposta corretta, l’alunno deve scrivere il procedimento seguito per individuarla, oppure giustificare la sua risposta. In questo caso è interessante notare che la pratica didattica degli insegnanti genera una differenza nei risultati degli allievi (Figura 14). Ad esempio, nella domanda D14 c’è quasi un 7% in più di risposte corrette per gli alunni i cui insegnanti dichiarano di chiedere sempre o quasi sempre agli alunni in classe di spiegare le risposte. Probabilmente questa abilità è fortemente influenzata dalle pratiche didattiche.

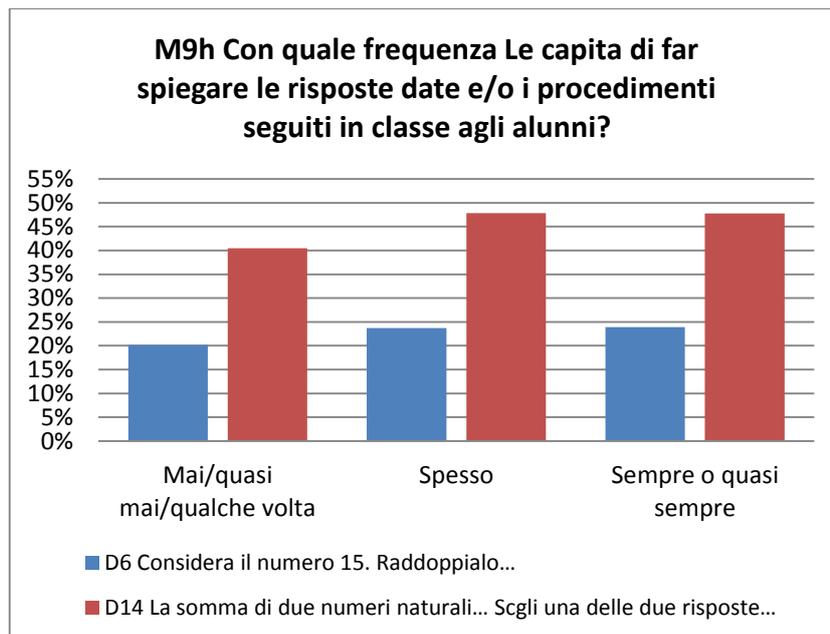


Figura 14. Relazione tra le domande D6 e D14 della prova Invalsi 2013-2014 per la classe terza della scuola secondaria di primo grado e la domanda M9h del Questionario Insegnanti.

4.3. Classe seconda secondaria di secondo grado

Nella scuola secondaria di secondo grado l’argomentazione dei risultati ottenuti è un’attività particolarmente importante. Per indagare questo processo sono state messe in relazione la domanda D6 (Figura 15) delle rilevazioni nazionali con l’item M9h del Questionario Insegnanti (“Con quale frequenza Le capita di far spiegare le risposte date e/o i procedimenti seguiti in classe agli alunni?”).

La risposta alla domanda D6 è piuttosto semplice perché collegata alla ricerca di un contro-esempio, infatti se $n=4$ allora il risultato dell’espressione è 21, che non è primo. L’aspetto interessante è che in questo caso sembra che la prassi didattica giochi un ruolo abbastanza rilevante in grado di influenzare i risultati degli allievi. Questo tipo di item rappresenta uno spunto di riflessione importante per gli insegnanti nel considerare un approccio diverso alla cultura dei teoremi e una sfida per le più diffuse pratiche didattiche. In Italia, ma anche in altri Paesi, l’approccio alla dimostrazione, che è uno dei cardini dell’insegnamento-apprendimento della matematica, è spesso di tipo mnemonico: si richiede agli studenti di capire e ripetere dimostrazioni prodotte da altri spesso solo in ambito geometrico.

Raramente si chiede di dimostrare qualche enunciato anche semplice in ambito numerico e ancor più raramente di trovare contro-esempi che possano confutare enunciati (Boero, Garuti & Lemut, 2007).

D6. Marco afferma che, per ogni numero naturale n maggiore di 0, n^2+n+1 è un numero primo. Marco ha ragione?

Scegli una delle due risposte e completa la frase.

Marco ha ragione, perché

.....

Marco non ha ragione, perché

.....

Figura 15. Domanda (D6) contenuta nella prova Invalsi 2013-2014 per la classe seconda della scuola secondaria di secondo grado¹⁷.

La differenza fra chi dichiara che non fa quasi mai attività di questo genere e chi, invece, dichiara che lo fa sempre o quasi sempre è di 7 punti percentuali nei risultati ottenuti dagli studenti (Figura 16).

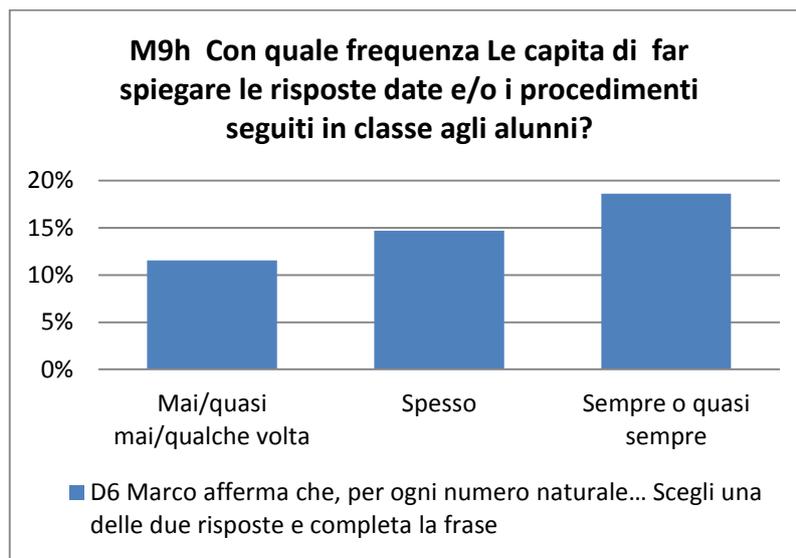


Figura 16. Relazione tra la domanda D6 della prova Invalsi 2013-2014 per la classe seconda della scuola secondaria di secondo grado e la domanda M9h del Questionario Insegnanti.

Relativamente allo scrivere relazioni tra numeri utilizzando le lettere, è stata messa in relazione l'item D17 (Figura 17) della prova cognitiva del livello 10 (scuola secondaria di secondo grado) con la domanda M9e del Questionario Insegnanti (“Con quale frequenza Le capita di far scrivere relazioni fra numeri utilizzando lettere e rappresentazioni?”).

¹⁷http://www.invalsi.it/areaprove/documenti/strumenti/10_matematica_fasc_1_STAMPA.pdf

D17. È data l'equazione $(2k-3)x + 1 - k = 0$, in cui x è l'incognita e k è un numero reale.

La soluzione dell'equazione è 1 per $k = \dots\dots\dots$

Figura 17. Domanda (D17) contenuta nella prova Invalsi 2013-2014 per la classe seconda della scuola secondaria di secondo grado¹⁸.

In questo caso, il fatto di avere delle prassi didattiche che vanno a lavorare su abilità legate alla relazione fra i numeri sembrerebbe incidere sull'esito degli studenti, come mostra la Figura 18.

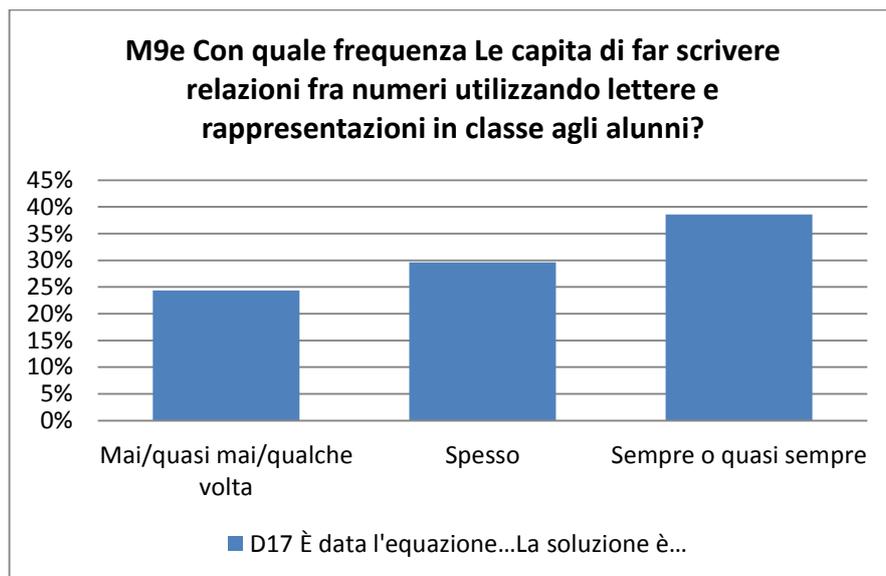


Figura 18. Relazione tra la domanda D17 della prova Invalsi 2013-2014 per la classe seconda della scuola secondaria di secondo grado e la domanda M9e del Questionario Insegnanti.

4. Conclusioni

Il presente contributo, finalizzato a mettere in relazione le risposte che i docenti di matematica hanno fornito alle domande del Questionario Insegnanti sulla didattica con gli esiti alle rilevazioni nazionali dei loro studenti, ha evidenziato un panorama diversificato su questo argomento nei due cicli di istruzione: mentre nella scuola primaria le differenze di pratiche didattiche dichiarate dai docenti sembrano non influenzare i risultati sia nel caso di domande su contenuti tradizionali sia nel caso di domande basate su contesti reali, nella scuola secondaria di primo emergono risultati incoraggianti per quanto riguarda le capacità relative agli aspetti argomentativi, al fornire spiegazioni sulle risposte date o sui procedimenti seguiti. Nella scuola secondaria di secondo grado, invece, è emerso che la prassi didattica assume un ruolo abbastanza rilevante in grado di influenzare i risultati degli allievi per quanto riguarda lo scrivere relazioni tra numeri utilizzando le lettere e di nuovo la capacità di argomentazione.

¹⁸http://www.invalsi.it/areaprove/documenti/strumenti/10_matematica_fasc_1_STAMPA.pdf

Due sono le principali direzioni verso cui riflettere alla luce dei risultati emersi: la debole relazione fra prassi didattiche e risultati di apprendimento, emersa soprattutto nella scuola primaria, potrebbe essere ricondotta alla scarsa corrispondenza fra domande del Questionario Insegnanti e domande della prova cognitiva di matematica oppure alla distanza tra ciò che le domande Invalsi chiedono e ciò che si fa concretamente nella pratica didattica quotidiana. La probabile scarsa corrispondenza fra domande del Questionario Insegnanti e domande della prova cognitiva dovrebbe innescare un percorso di riflessione e miglioramento delle domande del Questionario legate alle pratiche didattiche in modo da collegarle più strettamente con le domande delle rilevazioni nazionali (Servizio Nazionale di Valutazione e Prova Nazionale) ma, parallelamente, andrebbe indagata in modo più approfondito la reale ricaduta delle pratiche didattiche sui risultati di apprendimento.

Bibliografia

- AIRDM. Associazione Italiana di Ricerca in Didattica della Matematica. <http://www.airdm.org/> (ver. 15.04.2016).
- Anichini, G., Arzarello, F., Ciarrapico, L., & Robutti, O. (eds.). (2004). *New mathematical standards for the school from 5 through 18 years, The curriculum of mathematics from 6 to 19 years, on behalf of UMI-CIIM*, MIUR (ICME 10). Bologna: UMI.
- Arzarello, F., Garuti, R., & Ricci, R. (2015). The impact of PISA studies on the Italian national assessment system. In K. Stacey & R. Turner (eds.), *Assessing mathematical literacy. The PISA experience* (pp. 249-260). Springer International Publishing.
- Bartolini Bussi, M.G. (2001). Ricerca in didattica della matematica: alcuni studi italiani. In ricordo di Francesco Speranza. *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, 4(1), 117-150.
- Boero, P., Garuti, R., & Lemut, E. (2007). Approaching theorems in grade VIII. From history, epistemology and cognition to classroom practice. In P. Boero (ed.), *Theorems in school* (pp. 247-262). Rotterdam: Sense Publisher.
- Bolondi, G. (2013). Come usare in classe le prove Invalsi. *L'insegnamento della matematica*, 33(6), 686-701.
- Capperucci, D. (ed.). (2011). *La valutazione degli apprendimenti in ambito scolastico. Promuovere il successo formativo a partire dalla valutazione*. Milano: Franco Angeli.
- EC. European Commission. (2011). *L'insegnamento della matematica in Europa: sfide comuni e politiche nazionali*. http://eacea.ec.europa.eu/education/eurydice/documents/thematic_reports/132IT.pdf (ver. 15.04.2016).
- Fandiño Pinilla, M.I. (2010). Costruire una cultura della valutazione. In G. Bolondi, M.I. Fandiño Pinilla & S. Loiero (eds.), *Guida alle prove Invalsi* (pp. 4-6). Firenze: Giunti.
- Fandiño Pinilla, M. I. (2014). Diverse componente dell'apprendimento della matematica. In B. D'Amore (ed.), *La didattica della matematica: strumenti per capire e per intervenire. Convegno nazionale 2014* (pp. 71-80). Bologna: Pitagora.

- INVALSI. Istituto Nazionale per la Valutazione del Sistema educativo di Istruzione e di formazione. *Quadri di riferimento SNV*. <https://invalsi-areaprove.cineca.it/> (ver. 15.04.2016).
- INVALSI. Istituto Nazionale per la Valutazione del Sistema educativo di Istruzione e di formazione. *Questionario Insegnante*. <http://www.invalsi.it/Invalsi/ri/sis/questins.php> (ver. 15.04.2016).
- INVALSI. Istituto Nazionale per la Valutazione del Sistema educativo di Istruzione e di formazione. *Quadro di riferimento primo ciclo di istruzione. Prova di matematica*. https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/autori/QdR_Mat_I_ciclo.pdf (ver. 15.04.2016).
- INVALSI. Istituto Nazionale per la Valutazione del Sistema educativo di Istruzione e di formazione. *Quadro di riferimento secondo ciclo di istruzione. Prova di matematica*. https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/QdR_Mat_II_ciclo.pdf (ver. 15.04.2016).
- INVALSI. Istituto Nazionale per la Valutazione del Sistema educativo di Istruzione e di formazione. *Rilevazione apprendimenti. Prova di matematica, scuola primaria classe quinta*. http://www.invalsi.it/areaprove/documenti/strumenti/05_Matematica_Fasc_1_ST_AMPA.pdf (ver. 15.04.2016).
- INVALSI. Istituto Nazionale per la Valutazione del Sistema educativo di Istruzione e di formazione. *Rilevazione apprendimenti. Prova di matematica, scuola secondaria di primo grado classe terza*. http://www.invalsi.it/areadati/Esami_Stato/2013-2014/strumenti/PN2014_Matematica_F01.pdf (ver. 15.04.2016).
- INVALSI. Istituto Nazionale per la Valutazione del Sistema educativo di Istruzione e di formazione. *Rilevazione apprendimenti. Prova di matematica, scuola secondaria di secondo grado classe seconda*. http://www.invalsi.it/areaprove/documenti/strumenti/10_matematica_fasc_1_ST_AMPA.pdf (ver. 15.04.2016).
- MIUR. Ministero dell'Istruzione, dell'università e della Ricerca. (2012). Indicazioni nazionali per il curriculum della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione. *Annali della Pubblica Istruzione*. No. Speciale.
- Monaco, A. (2014). Apprendimento matematico: la forza della didattica. In B. D'Amore (ed.), *La didattica della matematica: strumenti per capire e per intervenire. Convegno nazionale 2014* (pp. 24-27). Bologna: Pitagora.
- Paola, D. (2012). Nuove tecnologie e insegnamento-apprendimento della matematica. *Insegnare*, 3, 17-20.
- Robutti, O. (2012). Dalla ricerca in educazione matematica alla pratica didattica. *Insegnare*, 3, 9-12.