Form@re
Open Journal per la formazione in rete

esperienze/riflessioni

Pitagora on the rocks. Una dimostrazione con i mattoncini

Pythagoras on the rocks. A proof with bricks

Michele Cagol[a], Alessandro Efren Colombi[b]

[a] *Libera Università di Bolzano, michele.cagol@education.unibz.it*
[b] *Libera Università di Bolzano, alessandro.colombi@unibz.it*

Abstract

In questo breve contributo viene proposta una semplice dimostrazione pratica del teorema di Pitagora, utilizzando mattoncini a incastro di plastica colorata di due forme: un cubo di due centimetri per lato e un prisma retto la cui base è un triangolo isoscele rettangolo e nel quale le due facce equivalenti sono uguali a quelle del mattoncino cubico. La dimostrazione è rivolta a bambini della scuola primaria (ma, eventualmente, anche in età prescolare) e prende le mosse dalla leggenda secondo la quale Pitagora avrebbe scoperto il suo teorema mentre stava osservando il pavimento piastrellato del palazzo di Policrate, tiranno di Samo. Da questa dimostrazione – che prende in considerazione solo triangoli rettangoli isosceli – è poi possibile passare a una dimostrazione del teorema di Pitagora per tutti i triangoli rettangoli.

Parole chiave: teorema di Pitagora; mattoncini; didattica della geometria; dimostrazione visiva.

Abstract

In this short paper a practical and simple proof of the Pythagorean theorem is proposed. It uses colourful interlocking plastic bricks with two shapes: a cube that measures two centimeters on each side and a right prism where the base is a right-angled isosceles triangle and the two equal rectangular faces are the same as those of the cubic brick. The proof is designed for primary school children (but also for preschool children) and begins by telling the legend of Pythagoras, who discovered his theorem by looking at the floor tile pattern of Polycrates' palace. This proof takes into account only right-angled isosceles triangle but it is possible to show the validity of Pythagorean theorem for all right-angled triangles by building a simple proof by rearrangement.

Keywords: Pythagorean theorem; bricks; geometry teaching; visual proof.

1. Introduzione

Il presente contributo costituisce un breve percorso didattico di tipo costruzionista volto a mostrare a bambine e bambini della scuola primaria (ma, eventualmente, anche in età prescolare) – attraverso una dimostrazione pratica, semplice e chiara – la validità del teorema di Pitagora per i triangoli rettangoli isosceli. Per la dimostrazione sono utilizzati gli *Artec© Blocks*, mattoncini a incastro di plastica colorata. I mattoncini impiegati (Figura 1) sono di due forme: un cubo che misura due centimetri per lato e un prisma retto la cui base è un triangolo isoscele rettangolo e nel quale le due facce equivalenti sono uguali a quelle del mattoncino cubico.

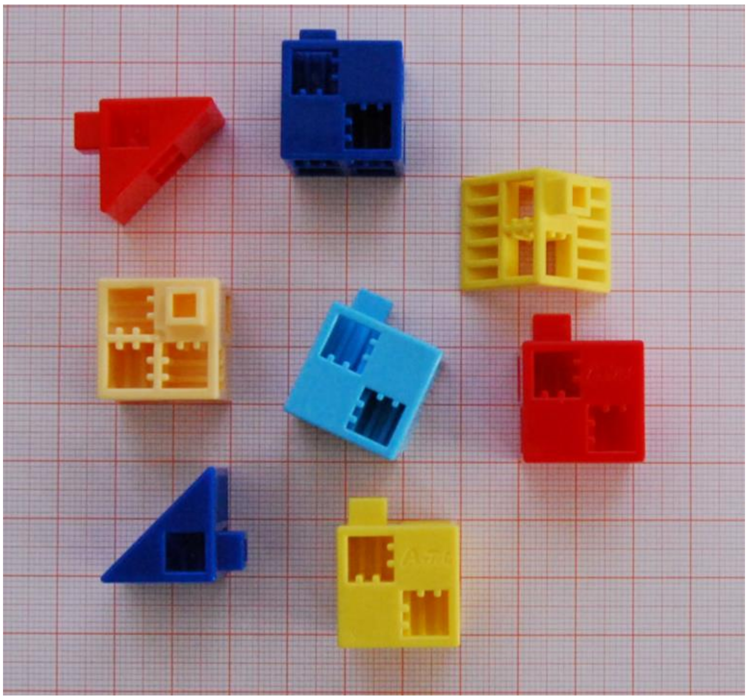

Figura 1. I mattoncini ad incastro *Artec© Blocks*.

2. Il teorema di Pitagora

Pitagora è un filosofo greco del VI secolo a.C. Non si sa con certezza se Pitagora abbia davvero scoperto il famoso teorema che porta il suo nome; sappiamo però che questo era sicuramente già conosciuto in Cina e in India. La dimostrazione del teorema, invece, è molto probabilmente successiva a Pitagora: costituisce, infatti, la Proposizione 47 del Libro I degli "Elementi" di Euclide, forse il più importante matematico dell'antichità, vissuto duecento anni circa dopo Pitagora. Il teorema di Pitagora enuncia che "se un triangolo rettangolo ha i lati di lunghezza a, b e c, dove c è la lunghezza dell'ipotenusa (il lato opposto all'angolo retto), allora $a^2 + b^2 = c^2$" (Gowers, 2002/2004, p. 56). A scuola, solitamente, alla formulazione algebrica si preferisce quella geometrica: in ogni triangolo rettangolo l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa è sempre uguale alla somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti.

3. Dimostrazioni visive, dimostrazioni colorate

Esistono moltissime dimostrazioni di questo famoso teorema: la dimostrazione di Euclide, quella di Abu'l-Wafa (riscoperta dall'agente di cambio Henry Perigal), quella in forma poetica di Sir George Airy, quella del presidente degli Stati Uniti d'America James A. Garfield etc. Alcune sono difficili, altre particolarmente veloci e di facile comprensione. Una delle dimostrazioni più apprezzate è nello stile di Bhaskara, matematico e astronomo indiano del XII secolo (Figura 2). "Il quadrato di lato $a + b$ può essere suddiviso in due modi differenti. In entrambe le suddivisioni ci sono quattro triangoli uguali, tutti equivalenti. È perciò possibile eliminarli, conservando l'equivalenza fra le aree delle due figure. Ma, in un caso l'area è $a^2 + b^2$, nell'altro è c^2" (Crilly, 2007/2009, p. 85).

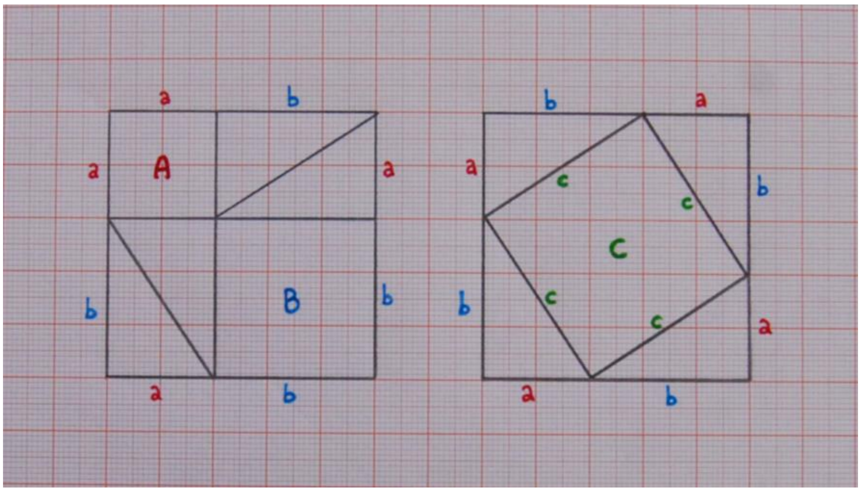

Figura 2. La dimostrazione visiva del teorema di Pitagora ad opera di Bhaskara.

Si tratta di una dimostrazione visiva o *ad oculos*. Da una prospettiva storica, le prime dimostrazioni sono di questo genere: il termine "dimostrazione" viene dal greco *apódeixis*, che ha la stessa radice del verbo *deíknumi* (mostrare). "Molte delle prime dimostrazioni, non solo in Grecia ma anche in Cina e in India, consistono di una elaborata figura, con nuovi elementi aggiunti rispetto a quelli dati, e dell'invito 'Guarda!'. Ancora oggi si chiamano dimostrazioni senza parole" (Lolli, 2005, p. 23). Oliver Byrne, nel 1847, pubblica "The first six books of the elements of Euclid, in which coloured diagrams and symbols are used instead of letters for the greater ease of learners". Egli utilizza quattro colori (rosso, blu, giallo e nero) per mostrare in maniera concreta e visiva le Proposizioni dei primi sei libri degli "Elementi" di Euclide e, così facendo, realizza un'opera bellissima, che ricorda i quadri di Piet Mondrian, nella quale i colori e le forme hanno una rilevante funzione didattica.

4. Una dimostrazione con i mattoncini colorati

La semplice dimostrazione qui proposta è di tipo visivo e fa uso del colore. Prende le mosse dalla leggenda secondo la quale Pitagora avrebbe scoperto il suo teorema mentre stava aspettando di essere ricevuto dal tiranno di Samo, Policrate, in un salone del suo palazzo. Il pavimento era formato da tante piastrelle quadrate. Il pavimento piastrellato può essere ricreato utilizzando i mattoncini cubici (Figura 3). La costruzione avviene in tre dimensioni, ma il pattern risultante ha due dimensioni.

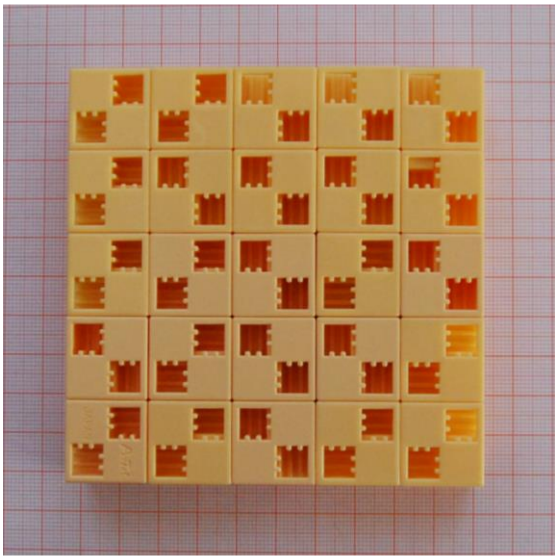

Figura 3. Riproduzione con i mattoncini *Artec© Blocks* delle piastrelle del palazzo di Policrate.

Pitagora notò che una piastrella era rotta sulla diagonale. La piastrella rotta, formata da due mezze piastrelle, può essere realizzata con due prismi (Figura 4).

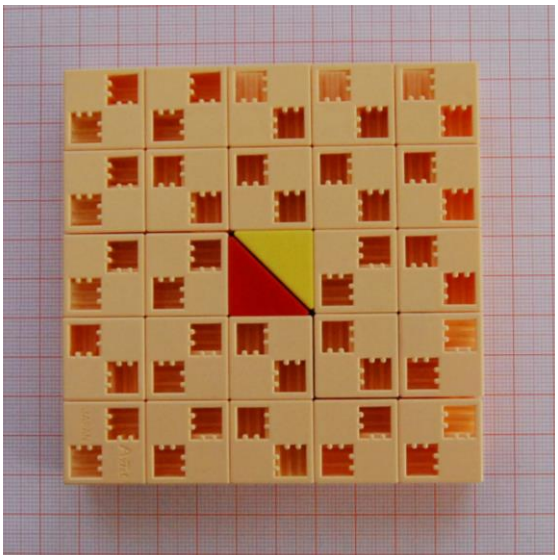

Figura 4. Riproduzione con i mattoncini *Artec© Blocks* delle piastrelle del palazzo di Policrate con la piastrella rotta (rossa e gialla).

La piastrella rotta è dunque formata da due triangoli rettangoli uguali ovvero le basi dei prismi. In questo caso i triangoli rettangoli sono anche isosceli, perché la lunghezza dei due cateti è equivalente. Pitagora, a questo punto, immaginò di costruire un quadrato avente come lato l'ipotenusa del triangolo: un quadrato costruito, quindi, sulla diagonale della piastrella rotta. Sull'ipotenusa del triangolo è possibile costruire un quadrato utilizzando quattro prismi, quattro triangoli rettangoli isosceli (Figura 5).

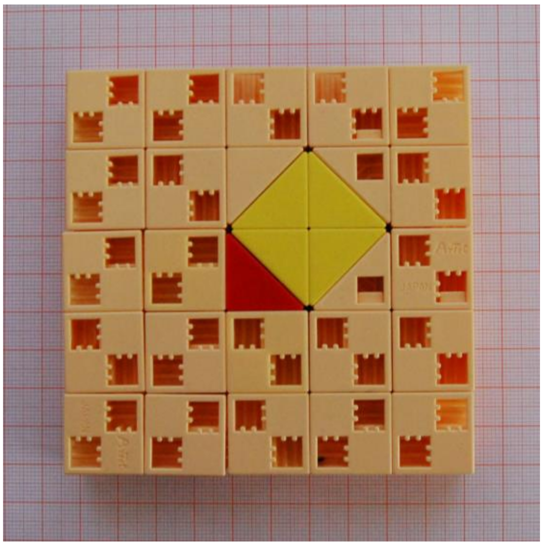

Figura 5. Il quadrato giallo costruito sull'ipotenusa del triangolo rosso.

L'area dei quadrati costruiti sui cateti equivale evidentemente a una piastrella, oppure a due mezze piastrelle (Figura 6).

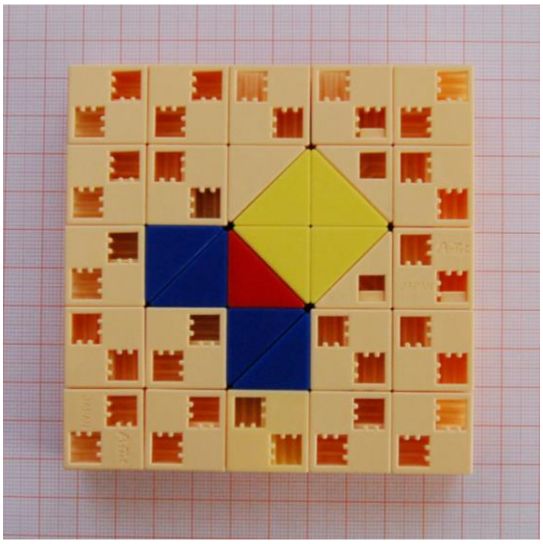

Figura 6. I quadrati blu costruiti sui cateti.

La somma delle due aree dei quadrati costruiti sui cateti è quindi di quattro mezze piastrelle. Anche l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa è di quattro mezze piastrelle. L'area del quadrato costruito sull'ipotenusa, dunque, è uguale alla somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti.

5. Una dimostrazione per tutti i triangoli rettangoli

La dimostrazione proposta tiene conto solamente dei triangoli rettangoli isosceli, ma il teorema di Pitagora vale per qualsiasi triangolo rettangolo. È possibile dimostrare la validità del teorema di Pitagora anche per triangoli rettangoli non isosceli – utilizzando sempre gli *Artec© Blocks* – componendo, ad esempio, tre quadrati di diversi colori con 9, 16 e 25 mattoncini cubici (Figura 7). Per la precisione, con i mattoncini – che hanno grandezza unitaria – è possibile costruire una dimostrazione del teorema di Pitagora valida solamente per i triangoli rettangoli con lati interi (cioè, corrispondenti a terne pitagoriche). Lo stesso modello di dimostrazione, però, può essere utilizzato per qualsiasi triangolo rettangolo: basterà sostituire i mattoncini con dei quadrati, ad esempio, di carta ritagliata.

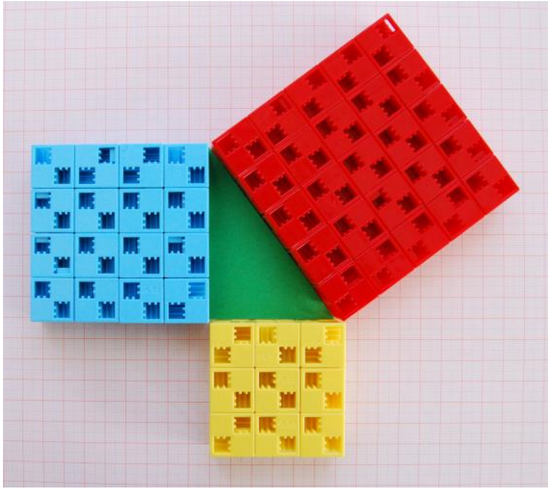

Figura 7. I tre quadrati costruiti su cateti e ipotenusa.

Una volta assemblati i tre quadrati con i mattoncini colorati, si può costruire un triangolo rettangolo nel quale le lunghezze dei lati corrispondono a una terna pitagorica (3, 4, 5). Il passo successivo consiste nel ritagliare quattro triangoli con lati di lunghezza corrispondente a 3, 4 e 5 mattoncini, poi costruire – con i quattro triangoli uguali e i tre quadrati – la semplice dimostrazione nello stile di Bhaskara (Figura 8 e Figura 9).

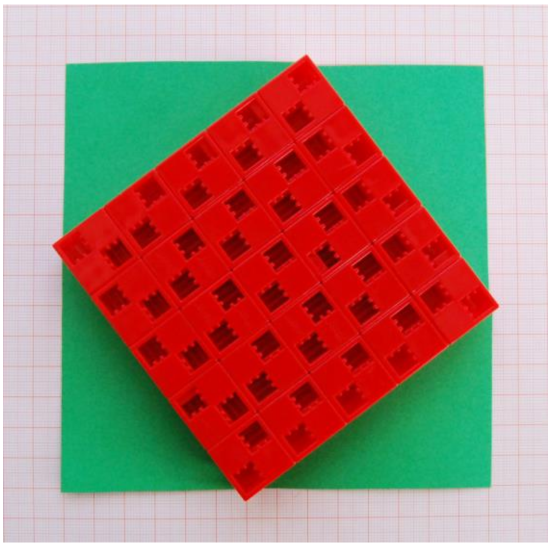

Figura 8. Dimostrazione del teorema di Pitagora con i mattoncini seguendo la suddivisione del quadrato di Bhaskara in cui l'area è c^2.

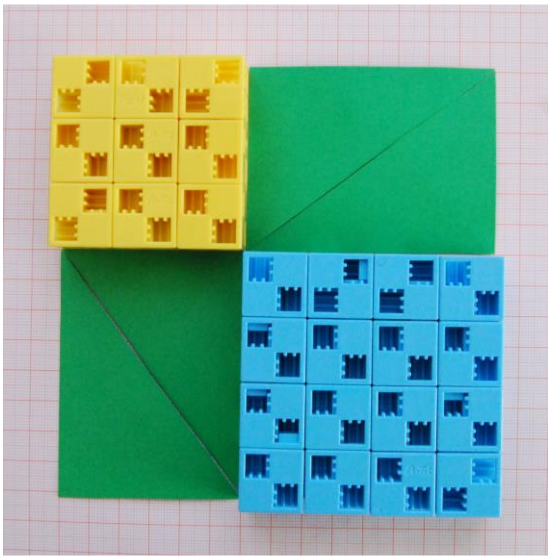

Figura 9. Dimostrazione del teorema di Pitagora con i mattoncini seguendo la suddivisione del quadrato di Bhaskara in cui l'area è $a^2 + b^2$.

6. Conclusioni

In questo breve percorso didattico – rivolto a bambini della scuola primaria o in età prescolare – è stata proposta una semplice dimostrazione visiva che fa uso del colore del teorema di Pitagora per i triangoli rettangoli isosceli utilizzando una nuova tipologia di mattoncini a incastro. È stata in seguito presentata, sempre impiegando i mattoncini colorati, una dimostrazione (leggermente più complessa) del teorema di Pitagora valida per tutti i triangoli rettangoli.

Bibliografia

Byrne, O. (1847). *The first six books of the elements of Euclid. Is which coloured diagrams and symbols are used instead of letters for the greater ease of learners*. London: William Pickering.

Crilly, T. (2009). *50 grandi idee di matematica* (L. Bussotti, Trans.). Bari: Edizioni Dedalo (Original work published 2007).

Gowers, T. (2004). *Matematica: un'introduzione* (M. Ugaglia, Trans.). Torino: Einaudi (Original work published 2002).

Lolli, G. (2005). *QED: fenomenologia della dimostrazione*. Torino: Bollati Boringhieri.